Exemples de démonstrations du chapitre orthogonalité et distance dans l’espace.

I Dispositif

Travail en ilots de 3 élèves sur tableaux blancs (9 tableaux blancs disposés sur les murs de la salle). Pas de rôle prédéfini au sein du groupe.

$1^{ière}$ étape :

- Chaque groupe sur une démonstration exemplaire à démontrer choisi par l’enseignant.
- Le type d’énoncé est choisi en fonction de la composition du groupe (contenu et forme)
- Résoudre l’énoncé en utilisant le tableau et en sollicitant l’enseignant si nécessaire.
- Réaliser sur feuille un énoncé simple direct d’application du résultat démontré (afin qu’à la fin de la séance les élèves des autres groupes puissent le résoudre).

$2^{ième}$ étape

- L’enseignant désignera un rapporteur pour que la solution puisse être exposée à l’ensemble de la classe.
- La préparation de la présentation de l’élève doit se faire à trois. L’élève s’entraine avec ces deux autres camarades qui sont là pour lui poser des questions et l’aider à améliorer sa prestation à partir du support tableau.

$3^{ième}$ étape

Exposé devant la classe.

$4^{ième}$ étape

Retour des groupes en ilots sur les tableaux afin que chaque groupe résolve l’énoncé préparé en amont par les autres groupes. *Prévoir des exercices supplémentaires pour ceux allant plus vite.*

Exercice 1. Soient A un point de l'espace, d une droite de l'espace, $\overrightarrow{u}$ un vecteur directeur de la droite d et $\overrightarrow{v} = \dfrac{1}{\|\overrightarrow{u}\|}\overrightarrow{u}$ (donc $\overrightarrow{v}$ est un vecteur directeur unitaire de la droite d. On remarquera que $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{v}\|^2 = 1$)

Soit H le projeté orthogonal de A sur d et B un point de d.

Objectif : Démontrer que $AH = \left\| \overrightarrow{AB} - \dfrac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{u}}{\|\overrightarrow{u}\|^2}\overrightarrow{u} \right\|$

1. Justifier qu'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{BH} = k\overrightarrow{v}$, puis que $k = \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{v}$.
2. On considère les étiquettes :

Pour les égalités :

- $= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BH}$
- $= -\left(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{v}\right)\overrightarrow{v}$
- $= \overrightarrow{AB} - \dfrac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{u}}{\|\overrightarrow{u}\|^2}\overrightarrow{u}$
- $= \left(\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AH}\right) \cdot \overrightarrow{v}\right)\overrightarrow{v}$
- $= -\dfrac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{u}}{\|\overrightarrow{u}\|^2}\overrightarrow{u}$
- $= \left(\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{v}\right)\overrightarrow{v}$
- $= \left(\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{v} + \underbrace{\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{v}}_{0}\right)\overrightarrow{v}$
- $= \left\| \overrightarrow{AB} - \dfrac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{u}}{\|\overrightarrow{u}\|^2}\overrightarrow{u} \right\|$

Pour les justifications.

- Linéarité du produit scalaire
- Relation de Chasles
- puisque $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$
- puisque $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{v}$
- *D'après la question 1*

Utiliser les étiquettes précédentes pour répondre aux questions ci-dessous. Certaines étiquettes de justifications peuvent être utilisées plusieurs fois.

(a) Montrer que $\overrightarrow{BH} = -\dfrac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{u}}{\|\overrightarrow{u}\|^2}\overrightarrow{u}$

	Egalités	Justifications
$\overrightarrow{BH}$	...	...
	...	...
	...	...
	...	...
	...	...

(b) Donc : $\overrightarrow{AH} =$ .... $=$ ....

(c) Donc : $AH =$ ....

Exercice 2. Soient A un point de l'espace, $\mathscr{P}$ un plan de l'espace, H le projeté orthogonal de A sur $\mathscr{P}$.

Objectif : Montrer que H est le point de $\mathscr{P}$ le *plus proche* de A.

Considérons M un point du plan $\mathscr{P}$ distinct de H.

1. Dans cette question l'on considère que $A \notin \mathscr{P}$.

   (a) Que peut-on dire du triangle AHM ? Justifier.

(b) Utiliser alors le théorème bien connu dans ce cas pour montrer que $AM \geqslant AH$.

(c) Dans quel cas a-t-on égalité $AM = AH$?

2. Dans cette question l'on considère que $A \in \mathscr{P}$. Justifier que $AM \geqslant AH$.
3. Conclure.

Exercice 3. Soient A un point de l'espace, $\mathscr{P}$ un plan de l'espace, $\overrightarrow{n}$ un vecteur normal de $\mathscr{P}$, H le projeté orthogonal de A sur $\mathscr{P}$. On note d la droite passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{n}$ et B un point du plan $\mathscr{P}$.

Objectif : Montrer que $AH = \dfrac{\left|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{n}\right|}{\|\overrightarrow{n}\|}$.

1. Déterminer $\overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{n}$.
2. Montrer que $\left|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{n}\right| = \|\overrightarrow{n}\| \times AH$.
3. En déduire que :

$$AH = \frac{\left|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{n}\right|}{\|\overrightarrow{n}\|}$$

Exercice 4. 1. Déterminer la distance du point $A(1,1,1)$ aux plans définis par :

$\mathscr{P}$: passant par O, de vecteur normal $\vec{u} : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ puis $\mathscr{P}'$: passant par $B(-1,0,0)$, de vecteur normal $\vec{v} : \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

2. Déterminer la distance du point $A(1,1,1)$ aux droites définies par :

$\mathscr{D}$: passant par O, de vecteur directeur $\vec{u} : \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ puis $\mathscr{D}'$: passant par $B(1,0,0)$,de vecteur directeur $\vec{v} : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$