Comment travailler sur les démonstrations *exemplaires* du programme.

I Théorème de la Médiane

Énoncé :
L'objectif est de démontrer le Théorème de la médiane :

Théorème 1 (Théorème de la médiane)

Hypothèse : Soient A et B deux points du plan $\mathscr{P}$ et I milieu de $[AB]$.
Thèse : $\underbrace{\text{Quel que soit un point M du plan } \mathscr{P}\text{, on a}}_{\text{domaine de validité}}$:

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4}$$

Pour la démonstration la ***boîte à outils*** pour justifier votre démonstration :

- La relation de Chasles.
- Propriétés du produit scalaire : bilinéarité et symétrie.
- La caractérisation du milieu par : *I milieu de* $[AB]$ *si et seulement si* $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

Soit A et B deux points du plan et I le milieu du segment $[BC]$.
On notera M un point quelconque du plan.

1. En utilisant que I est le milieu du segment $[BC]$:
   (a) Déterminer $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA}$.
   (b) Montrer que $\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} = -\frac{AB^2}{4}$
2. Montrer l'égalité :
$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI}^2 + \overrightarrow{MI} \cdot \left(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}\right) + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB}$$
3. En déduire l'égalité :
$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4}$$

II Ensemble de points

Énoncé : Soit A et B deux points distincts du plan. Nous cherchons l'ensemble des points M vérifiant $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.

Première approche : En utilisant le théorème de la médiane. On note I le milieu du segment $[AB]$.

1. Montrer que : $MI^2 - \frac{AB^2}{4} = 0$
2. Montrer que $IM = IA$.
3. Conclure.

Deuxième approche : En utilisant les configuration.

1. Dans cette question M est distinct de A et B. Que peut-on dire de la nature du triangle ABM.
2. En déduire que M est sur le cercle de diamètre $[AB]$.
3. Conclure.

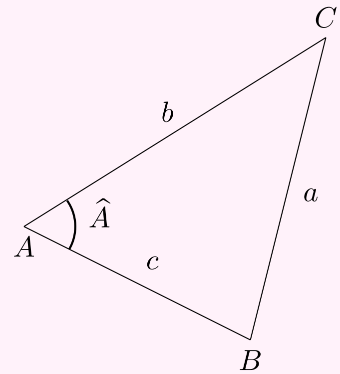
III Théorème d'Al-Kashi

Énoncé :
L'objectif est de démontrer le Théorème de la d'Al-Kashi :

Théorème 2 (Théorème de la d'Al-Kashi)

Hypothèse : Soit un triangle ABC du plan, on note $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$:

Thése : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}$



Soit un triangle ABC du plan, on note $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$.

1. Développer l'expression $\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right)^2$.
2. En déduire que : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}$.