Chapitre 5 : Dérivation.

I Généralités.

A Un peu d'histoire.

Le célèbre mathématicien grec Archimède de Syracuse (-287 ; -212) le premier semble s'intéresser à la notion de tangente. Il énonce des propriétés concernant notamment les tangentes à la spirale qui porte son nom.
Des siècles plus tard, le mathématicien italien Torricelli (1608-1646) et le français Roberval (1602-1675) prolongent la méthode d'Archimède et apportent les premières pierres à un édifice majeur des mathématiques, le calcul infinitésimal.
La notion de dérivée a vu le jour au $XVII^{ième}$ siècle dans les écrits de Leibniz et de Newton qui la nomme fluxion et qui la définit comme « le quotient ultime de deux accroissements évanescents ».
C'est cependant Blaise Pascal qui, dans la première moitié du $XVII^{ième}$ siècle, a le premier mené des études sur la notion de tangente à une courbe - lui-même les appelait « touchantes » ; le marquis de l'Hospital participera aussi à la fin du $XVII^{ième}$ siècle à étoffer cette nouvelle théorie, notamment en utilisant la dérivée pour calculer une limite dans le cas de formes indéterminées particulières.
C'est au $XVIII^{ième}$ siècle que 'Alembert introduit la définition plus rigoureuse du nombre dérivé en tant que limite du taux d'accroissement - sous une forme semblable à celle qui est utilisée et enseignée de nos jours. Cependant, à l'époque de d'Alembert, c'est la notion de limite qui pose problème : n'est pas encore construit formellement. C'est seulement avec les travaux de Weierstrass au milieu du $XIX^{ième}$ siècle que le concept de dérivée sera entièrement formalisé. C'est à Lagrange (fin du $XVIII^{ième}$ siècle) que l'on doit la notation $f'(x)$, aujourd'hui tout à fait usuelle, pour désigner le nombre dérivé de f en x .

B Attendus

- Connaître la définition du nombre dérivé comme limite du taux d'accroissement.
- Déterminer le nombre dérivé comme limite du taux d'accroissement. *1-2 page 115*
- Déterminer l'équation et savoir tracer la tangente en connaissant le nombre dérivé. *3 page 117*
- Savoir retrouver la majeure partie des dérivées des fonctions usuelles en utilisant la limite du taux d'accroissement. *1-2 page 147*
- Savoir déterminer par lecture, le coefficient directeur de la tangente en un point à une courbe et ainsi le nombre dérivé. *1 page 117*
- **Déterminer la fonction dérivée d'une fonction à partir des tableaux sur les "dérivées des fonctions usuelles" et "opérations sur les foncions"** . *2 page 147*
- Déterminer l'équation d'une tangente en un point.
- Savoir étudier les variations d'une fonction à partir du signe de sa fonction dérivée. *1 page 149*
- Déterminer les extrema d'une fonction à partir du signe de la fonction dérivée. *1 page 149*
- Savoir dresser un tableau de variations. *1 page 149*
- Savoir analyser ses erreurs à partir de la lecture d'un tableau de variation.
- Savoir relier le graphique au tableau pour vérifier ces résultats.
- Déterminer le nombre de solutions d'une équation à partir de la lecture d'un tableau de variation.
- Déterminer les extrema locaux à partir du tableau de variations.
- Résoudre des inégalités à l'aide d'une étude de fonction.

II Nombre dérivé en a d'une fonction

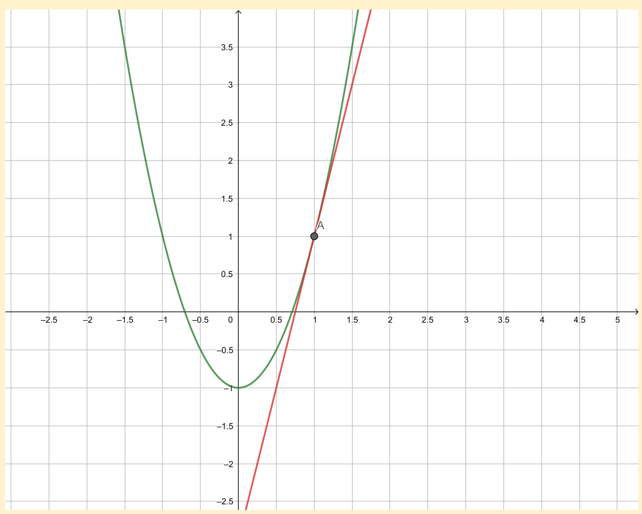
Définition 1

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

- Pour tout nombre réel $a \in I$ non nul et tel que $(a+h) \in I$, on appelle taux d'accroissement de la fonction f en a, le nombre
$$\tau_a(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$
- On dit que la fonction f est **dérivable** en a, lorsque le taux d'accroissement $\tau_a(h)$ tend vers un nombre L lorsque h tend vers 0.
- Ce nombre L, lorsqu'il existe, est appelé **le nombre dérivé** de f en a, et est noté $f'(a)$:
$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \tau_a(h) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = L$$
- Le nombre dérivé $f'(a)$, lorsqu'il existe, est le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a.

Méthode-exemple 1

Pour déterminer graphiquement le nombre dérivé de la fonction représentée ci-dessous :



Par lecture graphique, le coefficient directeur de la tangente en 1 est 4. Donc $f'(1) = 4$.

Méthode-exemple 2

Plus tard dans ce chapitre nous verrons d'autres méthodes de détermination du nombre dérivé plus efficaces.
Pour déterminer par le calcul, le nombre dérivé en 1 de la fonction

$$f(x) = 2x^2 - 1$$

On détermine le taux d'accroissement de f en 1 :

$$\tau(h) = \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{2(1+h)^2 - 1 - (2 \times 1^2 - 1)}{h} = \frac{2h^2 + 4h}{h} = 2h + 4$$

Puis on détermine le nombre dérivé en déterminant la limite de taux d'accroissement :

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \tau(h) = \lim_{h \to 0} 2h + 4 = 4$$

Le nombre dérivée de f en 1 est $f'(1) = 4$.

Exercice 1. Dans chaque cas, montrer que f est dérivable au point a indiqué, et donner $f'(a)$.

- $f(x) = \dfrac{1}{x}$; $a = 1$
- $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$; $a = 2$
- $f(x) = x^2 - 2x$; $a = 2$
- $f(x) = x^2 - 2x$; $a \in \mathbb{R}$
- $f(x) = x^3 - 3x$; $a = 2$
- $f(x) = x^3 - 3x$; $a \in \mathbb{R}$

Vidéo 1

Démontrer qu'une fonction est dérivable en un point.
Ou bien

Ex 9-22 page 74

III Fonctions dérivées

A Fonction dérivée

Définition 2

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

- On dit que f est dérivable sur I si f admet un nombre dérivé en tout point de I, c'est-à-dire si pour tout $a \in I$, $f'(a)$ existe.
- notée f' qui, à tout x de I associe le nombre $f'(x)$.

B Dérivées des fonctions usuelles

Proposition 1

Toute fonction affine définie par $f(x) = mx + p$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Sa fonction dérivée est définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) = m$.

Démonstration 1. Pour tout $a \in \mathbb{R}$ et $h \neq 0$,

$$\tau(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{(m(a+h)+p)-(ma+p)}{h} = \frac{mh}{h} = m$$

Ainsi, pour tout réel a, $\lim\limits_{h\to 0} \tau(h) = f'(a) = m$.

La fonction dérivée de f est donc la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) = m$.

Exemple 1. Soit la fonction affine f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3x + 12$, alors pour tout réel x, $f'(x) = -3$.

Proposition 2

La fonction carré, définie par $f(x) = x^2$, est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Sa fonction dérivée est définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) = 2x$.

Démonstration 2. Pour tout $a \in \mathbb{R}$ et $h \neq 0$,

$$\tau(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{(a+h)^2-a^2}{h} = \frac{2ah+h^2}{h} = 2a+h$$

Ainsi, pour tout réel a, $\lim\limits_{h\to 0} \tau(h) = f'(a) = 2a$.

La fonction dérivée de f est donc la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) = 2x$.

Proposition 3

Pour tout entier naturel non nul n, la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Sa fonction dérivée est définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) = nx^{n-1}$.

Exemple 2. $f(x) = x^{127}$ alors $f'(x) = 127x^{126}$
$f(x) = x^3$ alors $f'(x) = 3x^2$
$f(x) = x^2$, alors $f'(x) = 2x$.

Proposition 4

La fonction inverse f, définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

Sa fonction dérivée est définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$.

Démonstration 3. Pour tout $a \in \mathbb{R}^*$ et $h \neq 0$,

$$\tau(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{\dfrac{1}{a+h} - \dfrac{1}{a}}{h} = \frac{\dfrac{a}{a(a+h)} - \dfrac{a+h}{a(a+h)}}{h} = \frac{-\dfrac{h}{a(a+h)}}{h} = -\frac{1}{a(a+h)}$$

Ainsi, pour tout réel a, $\lim\limits_{h\to 0} \tau(h) = f'(a) = -\dfrac{1}{a^2}$.

La fonction dérivée de f est donc la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$.

Proposition 5

La fonction racine carrée, définie sur $\mathbb{R}_+ = [0; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$, est dérivable sur $\mathbb{R}_+^* =]0; +\infty[$.

Sa fonction dérivée est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Démonstration 4. Pour tout $a > 0$ et h tel que $a + h > 0$,

$$\tau(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{\sqrt{a+h} - \sqrt{a}}{h} = \frac{\left(\sqrt{a+h} - \sqrt{a}\right)\left(\sqrt{a+h} + \sqrt{a}\right)}{h\left(\sqrt{a+h} + \sqrt{a}\right)}$$

$$\tau(h) = \frac{(a+h) - a}{h\left(\sqrt{a+h} + \sqrt{a}\right)} = \frac{h}{h\left(\sqrt{a+h} + \sqrt{a}\right)} = \frac{1}{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}}$$

Ainsi, pour tout réel $a > 0$, $\lim\limits_{h \to 0} \tau(h) = f'(a) = \dfrac{1}{2\sqrt{a}}$.

La fonction dérivée de f est donc la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Ex 23 à 27 page 75

C Opérations sur les dérivées

Proposition 6

Soit u une fonction dérivable sur I et $k \in \mathbb{R}$, alors la fonction $f = ku$ est dérivable sur I, avec, $f' = ku'$.

Démonstration 5. Pour tout $a \in I$ et $h \neq 0$ tel que $(a + h) \in I$,

$$\tau(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{ku(a+h) - ku(a)}{h} = k\frac{u(a+h) - u(a)}{h}$$

Or, comme u est dérivable en a, on a $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{u(a+h) - u(a)}{h} = u'(a)$, et donc $\lim\limits_{h \to 0} \tau(h) = f'(a) = ku'(a)$.

Exemple 3. Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2$.
Alors, $f = 3u$, où u est la fonction carré, dérivable sur $\mathbb{R}$ avec, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u'(x) = 2x$.
Ainsi, f est dérivable sur $\mathbb{R}$, avec, $f' = 3u'$, soit, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3 \times 2x = 6x$.

Proposition 7

Soit u et v deux fonctions dérivables sur I, alors la somme $u + v$ est dérivable sur I avec $(u + v)' = u' + v'$.

Démonstration 6. Pour tout $a \in I$ et $h \neq 0$ tel que $(a + h) \in I$,
Ainsi, $\lim\limits_{h \to 0} \tau(h) = u'(a) + v'(a)$.

Exemple 4. Soit f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x}$.

Alors $f = u + v$, où $u(x) = x^2$ et $v(x) = \dfrac{1}{x}$ sont dérivable sur $\mathbb{R}^*$ avec $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$.

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = u'(x) + v'(x) = 2x - \dfrac{1}{x^2}$.

Proposition 8

Soit u et v deux fonctions dérivables sur I, alors la fonction produit uv est dérivable sur I, avec $(uv)' = u'v + uv'$.

Démonstration 7. Pour tout $a \in I$ et $h \neq 0$ tel que $(a+h) \in I$, Or, comme u et v sont dérivables en a, $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{u(a+h)-u(a)}{h} = u'(a)$, et $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{v(a+h)-v(a)}{h} = v'(a)$,

et on a donc $\lim\limits_{h\to 0} \tau(h) = u'a)v(a) + u(a)v'(a)$.

Exemple 5. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x+1)(-x+3)$.

Calculer de deux manières différentes f'.

Proposition 9

Pour tout entier naturel non nul n, la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Sa fonction dérivée est définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) = nx^{n-1}$.

Démonstration 8. On cherche à démontrer que la propriété est vraie pour **tous les entiers naturels** n.

On sait déjà que cette propriété est vraie pour

- $n = 1$: $f(x) = x^1 = x$ a pour dérivée $f'(x) = 1 = 1x^0 = 1x^{1-1}$.
- $n = 2$: $f(x) = x^2$ a pour dérivée $f'(x) = 2x = 2x^1 = 2x^{2-1}$.

Pour $n = 3$, on peut écrire $f(x) = x^3$ comme un produit $f(x) = x^3 = x \times x^2$, et on a alors $f'(x) = 1 \times x^2 + x \times (2x) = 3x^2 = 3x^{3-1}$ et la formule est encore vraie.

De même, pour $n = 4$, $f(x) = x^4 = x \times x^3$, et donc, $f'(x) = 1 \times x^3 + x \times (3x^2) = 4x^3 = 4x^{4-1}$.

On cherche à généraliser et montrer que cette formule est vraie pour tous les entiers non nuls. Supposons que cette formule soit vraie pour un certain entier naturel non nul n, c'est-à-dire que la dérivée de $f(x) = x^n$ soit $f'(x) = nx^{n-1}$.

Alors pour l'entier suivant $(n+1)$, $f(x) = x^{n+1} = x \times x^n$ a pour dérivée $f'(x) = 1 \times x^n + x \times (nx^{n-1}) = x^n + nx^n = (n+1)x^n = (n+1)x^{(n+1)-1}$.

Ainsi, si la formule est vraie pour un certain entier n, elle est encore vraie pour l'entier suivant $(n+1)$.

Or, on a vu que cette formule est vraie pour l'entier $n = 1$, elle est donc encore vraie pour l'entier suivant $n = 2$, et donc aussi pour l'entier suivant $n = 3$, puis aussi pour $n = 4$, $n = 5$, $n = 6$, ...

Finalement cette formule est vraie pour tous les entiers naturels à partir de 1.

Cette démonstration s'appelle une démonstration par **récurrence**.

Proposition 10

Soit une fonction u dérivable sur I telle que $u(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$.

Alors la fonction $\dfrac{1}{u}$ est dérivable sur I avec $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$.

Démonstration 9. Pour tout $a \in I$ et $h \neq 0$ tel que $(a+h) \in I$,

$$\tau(h) = \frac{\dfrac{1}{u(a+h)} - \dfrac{1}{u(a)}}{h} = \frac{\dfrac{u(a)-u(a+h)}{u(a+h)u(a)}}{h} = \frac{u(a)-u(a+h)}{h} \times \frac{1}{u(a+h)u(a)}$$

Or, comme u est dérivable en a, $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{u(a+h)-u(a)}{h} = u'(a)$, et donc, $\lim\limits_{h\to 0} \tau(h) = -u'(a) \times \dfrac{1}{(u(a))^2}$.

Exemple 6. Calculer la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$ par $f(x) = \dfrac{1}{2x+1}$.

Proposition 11

Soit $u$et v deux fonctions dérivables sur I, telles que pour tout $x \in I$, $v(x) \neq 0$.
Alors la fonction $\frac{u}{v}$ est dérivable sur I, avec $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

Démonstration 10. On peut écrire $\frac{u}{v} = u \times \frac{1}{v}$, et on a donc, en utilisant la dérivée d'un produit, et la dérivée de l'inverse d'une fonction :

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \left(u \times \frac{1}{v}\right)' = u' \times \frac{1}{v} + u \times \left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{u'}{v} + u \times \left(-\frac{v'}{v^2}\right) = \frac{u'v}{v^2} - \frac{uv'}{v^2} = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Exemple 7. Calculer la dérivée de f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ par $f(x) = \frac{2x+3}{x-2}$

D Tableau récapitulatif : Formules usuelles.

1. Dérivées des fonctions usuelles

Fonction f	Dérivée f'	f est dérivable sur
k (constante)	0	$\mathbb{R}$
x	1	$\mathbb{R}$
x^2	$2x$	$\mathbb{R}$
$x^n \quad (n \in \mathbb{N})$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+^* =]0; +\infty[$

u et v désignent deux fonctions quelconques, définies et dérivables sur un intervalle I.

Fonction	Dérivée
ku, $k \in \mathbb{R}$	ku'
$u + v$	$u' + v'$
uv	$u'v + uv'$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$
u^2	$2u'u$
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$
$u^n \ (n \in \mathbb{Z}^*)$	$nu'u^{n-1}$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$u(v(x))$	$v'(x) \times u'(v(x))$

.

2. Opérations sur les dérivées

Méthode 3

Pour déterminer la fonction dérivée d'une fonction donnée :

- Veillez à n'appliquer aucune autre formule (sortie de votre imagination) autre que celles précisées ci-dessus !!!
- Il s'agit de trouver la décomposition de votre fonction permettant l'utilisation d'une des formules ci-dessous. Ce travail est proche de ce que l'on fait lors de décompositions en fonctions de référence.
- Pensez enfin que si la forme obtenue est factorisée, ne surtout pas la développer avant d'être sûr que ce soit nécessaire.

Méthode-exemple 4

Si l'on a la fonction polynôme :

$$f(x) = 4x^3 - 2x$$

Étape du calcul de la dérivé	Formule utilisée
$f'(x) = (4x^3 - 2x)'$	$(u+v)' = u' + v'$
$f'(x) = (4x^3)' - (2x)'$	$(ku)' = ku'$
$f'(x) = 4(x^3)' - 2(x)'$	$(x^n)' = nx^{n-1}$ et $x' = 1$
$f'(x) = 4 \times 3x^2 - 2 \times 1$	
$f'(x) = 12x^2 - 2$	

Rédaction de ce type de calcul à terme :

$$f'(x) = 4 \times 3x^2 - 2 \times 1 = 12x^2 - 2$$

Vidéo 2

Exemple 1 ; Exemple 2 ; Exemple 3 ; Exemple 4 ; Exemple 5 et enfin Exemple 6

Exercice 2. Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f dans chacun des cas :

a) $f(x) = 3$ b) $f(x) = 3x$ c) $f(x) = \dfrac{5}{2}x$ d) $f(x) = x^2$

e) $f(x) = x^7$ f) $f(x) = 2x^3$ g) $f(x) = 3x + 2$ h) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$

i) $f(x) = -x^2 + x - \dfrac{7}{2}$ j) $f(x) = \dfrac{2x}{x+1}$ k) $f(x) = \dfrac{-x^2 - x + 1}{x+1}$ l) $f(x) = \dfrac{4}{x}$

m) $f(x) = \dfrac{1}{x^4}$ n) $f(x) = 2x^5 + \sqrt{x}$ o) $f(x) = (3x+2)x^2$ p) $f(x) = (-2x+1)(x+1)$

1 à 15 page 160

E Équation de la tangente

Proposition 12

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I, et $a \in I$.
Alors, l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f au point d'abscisse α est :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a) \ .$$

Démonstration 11. Comme f est dérivable en α, la tangente à $\mathcal{C}_f$ a une équation réduite de la forme :

$$y = f'(\alpha)x + p$$

De plus, cette tangente passe par le point $A\left(\alpha; f(\alpha)\right)$ et donc :

$$f(\alpha) = f'(\alpha)\alpha + p \iff p = f(\alpha) - f'(\alpha)\alpha$$

Ainsi la tangente a pour équation :

$$y = f'(\alpha)x + f(\alpha) - f'(\alpha)\alpha = f'(\alpha)\left(x - \alpha\right) + f(\alpha)$$

Méthode-exemple 5

Pour déterminer l'équation de la tangente en 1 de la représentation graphique de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2x^2 - 1$$

On commence par déterminer la fonction dérivée :

$$f'(x) = 4x^2$$

Ensuite on détermine les valeurs :

$$f(1) = 2 \times 1^2 - 1 = 1 \qquad et \qquad f'(1) = 4 \times 1 = 4$$

Puis l'on applique la forme précédente :

$$T_1 : y = f'(1)(x-1) + f(1) = 4(x-1) + 1 = 4x - 3$$

Vidéo 3

Déterminer le coefficient directeur d'une tangente.
Équation d'une tangente 1 et Équation d'une tangente 2

Exercice 3. Dans chaque cas, déterminer une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point a donné :

a) $f(x) = 3x^2 + 5x - 2$ et $a = -2$

b) $f(x) = \dfrac{1}{2}(-3 + x + x^2)$ et $a = 4$.

c) $f(x) = (2x+1)^2$ et $a = 0$.

Exercice 4. f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^2 + 4x$, et $\mathcal{C}_f$ est sa courbe représentative.

1. Donner une équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse 3.
2. a) Etudier le signe de $f(x) - (-8x + 18)$.
   b) En déduire la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à T.

Exercice 5.

1. Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.
   Montrer que la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse a passe par l'origine du repère si et seulement si $f(a) = af'(a)$.
2. Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$.
   Quels sont les points de $\mathcal{C}_f$ en lesquels la tangente passe par l'origine.

IV Applications de la dérivation

A Sens de variation d'une fonction

Proposition 13

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- Si pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$, alors f est strictement croissante sur I.
- Si pour tout $x \in I$, $f'(x) < 0$, alors f est strictement décroissante sur I.
- Si pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$, alors f est constante sur I.

Ex 8 à 24 page 96-97

Vidéo 4

Une étude de fonction.

Exercice 6. Dresser le tableau de variation des fonctions de l'exercice 5 et des fonctions suivantes :
q) $f(x) = 2x^2 + 4x - 3$ r) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x + 4$ s) $f(x) = \dfrac{-2x+1}{x+1}$ t) $f(x) = \dfrac{3}{x+3} - \dfrac{2}{x+2}$

Exercice 7. f est la fonction définie par l'expression $f(x) = \dfrac{1}{-2x^2 + 4x - 3}$.

1. On définit la fonction g sur $\mathbb{R}$ par l'expression $g(x) = -2x^2 + 4x - 3$.
   Etudier les variations de g.
2. En déduire les variations de f puis le minimum de f sur $\mathbb{R}$.

16 à 28 page 162

B Éxtrema d'une fonction

Définition 3

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

- Un **extremum** est un minimum ou un maximum.
- f présente un **maximum local** $m = f(x_0)$ si il existe un intervalle $J \subset I$ tel que pour tout $x \in J$, $f(x) \leqslant f(x_0)$.
- f présente un **minimum local** $m = f(x_0)$ si il existe un intervalle $J \subset I$ tel que pour tout $x \in J$, $f(x) \geqslant f(x_0)$.
- L'extremum est dit **global** lorsque $J = I$.

Proposition 14

Si $f(x_0)$ est un extremum local sur l'intervalle $]a; b[$, alors $f'(x_0) = 0$.
La courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction f admet une tangente horizontale au point $(x_0\ ;\ f(x_0))$.

Vidéo 5

Recherche d'un extrémum

Exercice à partir du 29 page 162

Remarque 1. Ce théorème dit que : $f(x_0)$ extremum local $\Longrightarrow f'(x_0) = 0$.
La réciproque : $f'(x_0) = 0 \Longrightarrow f(x_0)$ extremum local est FAUSSE.

Par exemple, soit $f(x) = x^3$. Alors $f'(x) = 3x^2$ et $f'(x) = 0 \iff x = 0$. Ainsi, $f'(0) = 0$. Néanmoins $f(0)$ n'est ni un minimum ni un maximum local de f car pour $x < 0$, $f(x) = x^3 < 0 = f(0)$ et pour $x > 0$, $f(x) = x^3 > 0 = f(0)$.

Exercice 8. f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 3}{4x^2 + 1}$.

1. A l'aide de la calculatrice tracer $\mathcal{C}_f$ et localiser le maximum de f.

2. Vérifier par le calcul s'il s'agit bien d'un maximum de f.

Exercice 9. Soit f la fonction définie sur $[-10;10]$ par $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 10$.
Rechercher les éventuels extrema locaux et globaux de f.

Exercice 10. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.
Déterminer les coordonnées de l'extremum de f. Est-ce un minimum ou un maximum ?

Exercice 11. Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[-6;4]$.
On donne le tableau de variation de la fonction f' :
Préciser les éventuels extrema locaux de f.

Exercice 12. Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[-4;4]$.
On donne le tableau de variation de la fonction f' :
Préciser les éventuels extrema locaux de f.

Exercice 13. La consommation C d'un véhicule peut s'exprimer en fonction de la vitesse v, pour une vitesse comprise entre 10 km/h et 130 km/h, par l'expression

$$C(v) = 0,06v + \frac{150}{v} .$$

A quelle vitesse faut-il rouler pour que la consommation soit minimale ?

C Résolution d'équations

Exercice 14. Soit f une fonction définie et dérivable sur $[-2;5]$ et dont le tableau de variation est le suivant :

x	-2		1		4		5
f	1	$\nearrow$	4	$\searrow$	-3	$\nearrow$	10

Déterminer le nombre de solutions, et l'intervalle où elles se situent, de l'équation
a) $f(x) = 0$ b) $f(x) = 2$ c) $f(x) = -5$

Exercice 15. On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + x + 1$.
Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $[-3;2]$.
Déterminer un encadrement plus précis de cette solution.

Exercice 16. On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x - 1$.
Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement trois solutions, respectivement dans les intervalles $]-2;-1[$, $]-1;1[$ et $]1;2[$.
Donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de la plus grande de ces solutions.

V Exercices

Exercice 17. La trajectoire d'un mobile est portée par la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $y = \dfrac{1}{t}$ dans un repère orthonormé.

On admet que lorsqu'il quitte sa trajectoire en M, le mobile poursuit son mouvement en ligne droite sur la tangente à $\mathcal{C}$ en M.

A quel endroit doit-il quitter sa trajectoire pour passer par le point $A(4;0)$?

Exercice 18. f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x^2 - 6x + 2$.
Montrer que la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de f est toujours au-dessus de n'importe laquelle de ses tangentes.

Exercice 19. *On dit que deux paraboles sont tangentes entre elles lorsqu'elles ont un point commun A et une tangente commune en A.*
A tout nombre $m \neq 0$, on associe la parabole $\mathcal{P}_m$ d'équation $y = mx^2 + (1-2m)x + m$.
Montrer que toutes ces paraboles sont tangentes entre elles.