Chapitre 5 : Dérivation.

I Un peu d'histoire.

Le célèbre mathématicien grec Archimède de Syracuse (-287 ; -212) le premier semble s'intéresser à la notion de tangente. Il énonce des propriétés concernant notamment les tangentes à la spirale qui porte son nom.
Des siècles plus tard, le mathématicien italien Torricelli (1608-1646) et le français Roberval (1602-1675) prolongent la méthode d'Archimède et apportent les premières pierres à un édifice majeur des mathématiques, le calcul infinitésimal.
La notion de dérivée a vu le jour au $XVII^{ième}$ siècle dans les écrits de Leibniz et de Newton qui la nomme fluxion et qui la définit comme « le quotient ultime de deux accroissements évanescents ».
C'est cependant Blaise Pascal qui, dans la première moitié du $XVII^{ième}$ siècle, a le premier mené des études sur la notion de tangente à une courbe - lui-même les appelait « touchantes » ; le marquis de l'Hospital participera aussi à la fin du $XVII^{ième}$ siècle à étoffer cette nouvelle théorie, notamment en utilisant la dérivée pour calculer une limite dans le cas de formes indéterminées particulières.
C'est au $XVIII^{ième}$ siècle que 'Alembert introduit la définition plus rigoureuse du nombre dérivé en tant que limite du taux d'accroissement - sous une forme semblable à celle qui est utilisée et enseignée de nos jours. Cependant, à l'époque de d'Alembert, c'est la notion de limite qui pose problème : n'est pas encore construit formellement. C'est seulement avec les travaux de Weierstrass au milieu du $XIX^{ième}$ siècle que le concept de dérivée sera entièrement formalisé. C'est à Lagrange (fin du $XVIII^{ième}$ siècle) que l'on doit la notation $f'(x)$, aujourd'hui tout à fait usuelle, pour désigner le nombre dérivé de f en x .

II Attendus

- Savoir déterminer la fonction dérivée d'une fonction polynôme du second degré. ***Méthode 1***
- Savoir étudier les variations d'une fonction à partir du signe de sa fonction dérivée. ***Méthode 2***
- Savoir dresser un tableau de variations. ***Méthode 2***
- Savoir déterminer l'équation d'une droite par lecture graphique . ***Méthode 3***
- Savoir tracer une droite à partir de son équation. ***Méthode 4***
- Déterminer l'équation d'une tangente en un point d'abscisse a par :
  - lecture graphique. ***Méthode 5.***
  - par utilisation de le formule :

    $$y = f'(a)(x-a) + f(a) \ .$$

    Méthode 6 et 7.
- Savoir comparer les résultats obtenus par le calcul et les conjectures possibles par lecture graphique.

III Dérivation des polynômes du second degré.

A Fonction dérivée d'une fonction du second degré.

Méthode-exemple 1

Pour déterminer la fonction dérivée.
Soit f une fonction polynôme du second degré définie par :

$$f(x) = 3x^2 - 2x + 6$$

. On "transforme" :

- Le x^2 en $2x$
- Le x en 1
- Le "6" est simplement "annulé".

On obtient donc :

$$f'(x) = 3 \times 2x - 2 \times 1 + 0 \underbrace{=}_{simplification} 6x - 2$$

Exercice 1. Dresser les tableau de variations des fonctions polynômes du second degré suivantes :

- $f(x) = 10x^2 - 1x + 6$
- $g(x) = 1x^2 - 7x + 2$
- $h(x) = 7x^2 - 9x + 5$
- $i(x) = 8x^2 - 2x + 1$
- $j(x) = 4x^2 - 9x + 1$
- $k(x) = 9x^2 - 8x + 1$
- $l(x) = 10x^2 - 8x + 4$
- $m(x) = 3x^2 - 3x + 6$
- $n(x) = 5x^2 - 0x + 6$
- $o(x) = 8x^2 - 6x + 2$
- $p(x) = 4x^2 - 3x + 4$
- $q(x) = 8x^2 - 8x + 3$

B Variation d'une fonction

Proposition 1

Soit une fonction f définie et dérivable sur un intervalle I.

- Si $f'(x) \geqslant 0$, alors f est croissante.
- Si $f'(x) \leqslant 0$, alors f est décroissante.

Méthode-exemple 2

Pour dresser le tableau de variation de f :
Soit f une fonction polynôme du second degré définie par :

$$f(x) = 3x^2 - 2x + 6$$

Alors :

$$f'(x) = 3 \times 2x - 2 \times 1 + 0 = 6x - 2$$

Maintenant :
$1^{ière}$ **étape : On cherche la valeur où f' s'annule**

$$6x - 2 = 0 \underbrace{\Leftrightarrow}_{+2} 6x = 2 \underbrace{\Leftrightarrow}_{/6} x = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$2^{ième}$ **étape : On cherche le signe du coefficient de x puisqu'ici f' est une fonction affine.**
Ici $a = 6 > 0$ donc dans le tableau pour le signe de f', on "mettra" un "+" à droite.
$3^{ième}$ **étape : On dresse le tableau de la fonction f :**

x		$\frac{1}{3}$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$\frac{17}{3}$	$\nearrow$

$4^{ième}$ **étape : On détermine la valeur de l'extremum qui est ici un minimum :**

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = 3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 2 \times \frac{1}{3} + 6 = \frac{17}{3}$$

On peut ainsi finir de compléter le tableau précédent.

Exercice 2. Dresser les tableaux de variations des fonctions polynômes du second degré suivantes :

- $f(x) = 9x^2 - 9x + 8$
- $g(x) = 8x^2 - 2x + 4$
- $h(x) = 8x^2 - 2x + 5$
- $j(x) = 6x^2 - 9x + 6$
- $j(x) = 4x^2 + 3x - 9$
- $k(x) = 1x^2 + 2x - 2$
- $l(x) = 2x^2 + 3x - 3$
- $m(x) = 9x^2 + 6x - 3$

IV Représentation graphique d'une tangente.

A Lecture graphique d'une équation de droite.

Méthode-exemple 3

Si l'on considère la droite représenter ci-dessous :
L'équation de cette droite est de la forme :

$$y = ax + b$$

Le nombre a est le coefficient directeur et le nombre b est l'ordonnée à l'origine..
La valeur de b se lit directement à l'intersection de la droite et de l'axe vertical. Donc ici :

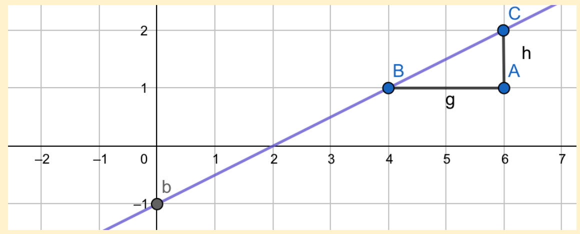
$$b = -1$$

Par ailleurs pour déterminer le coefficient directeur a, on peut utiliser le triangle tracé ci-dessus :

$$a = \frac{h}{g} = \frac{1}{2}$$

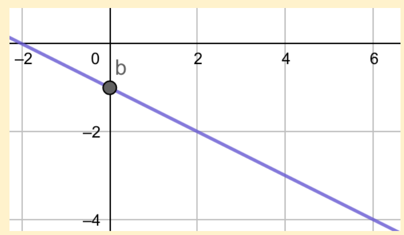
Donc l'équation de la droite ci-dessus est :

$$y = \frac{1}{2}x - 1$$

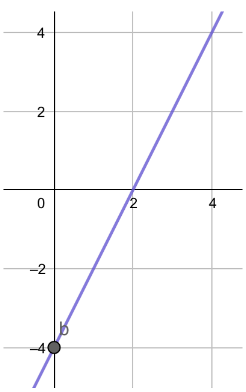


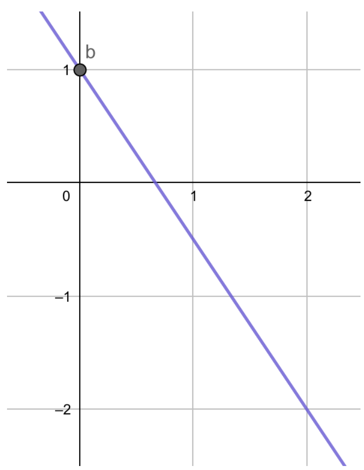
Si la droite avait eu une pente descendante, on aurait obtenue :

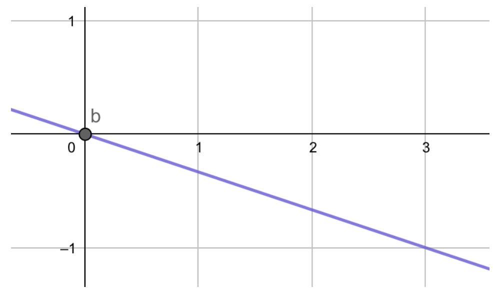
$$y = -\frac{1}{2}x - 1$$



Exercice 3. Déterminer les équations des droites représentées ci-dessous.







Méthode-exemple 4

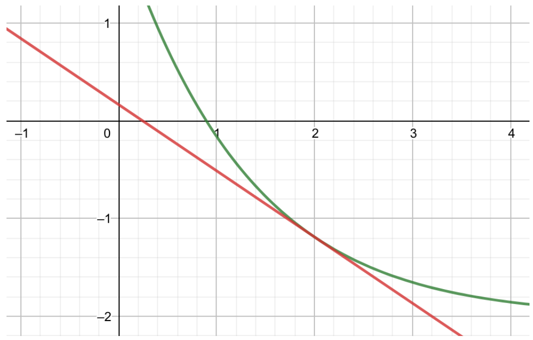
Tracer les droites d'équation :

a) $d_1 : y = 2x + 1$ b) $d_2 : y = -\frac{3}{2}x + 1$ c) $d_3 : y = x - 2$

B Lecture graphique du nombre dérivée.

Définition 1

Soit une fonction f définie sur un intervalle I, $\mathbb{C}$ sa représentation graphique et A un point de $\mathcal{C}$ d'abscisse a. La droite **tangente** à $\mathcal{C}$ en A est la droite qui "suit" au mieux la courbe $\mathcal{C}$ au point A.



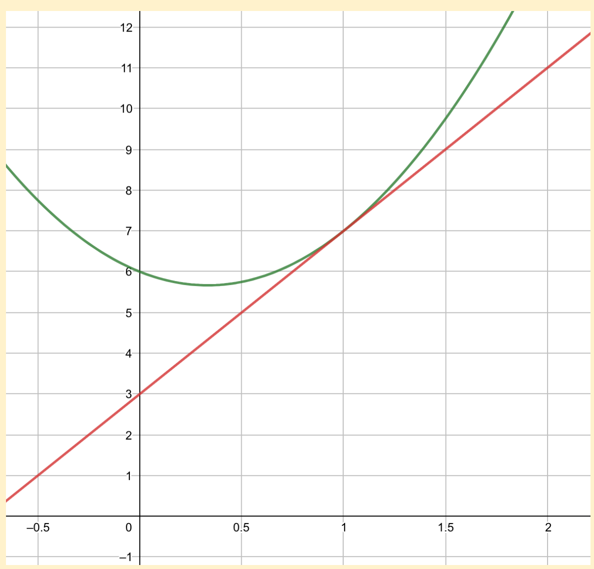
Le coefficient directeur de cette droite est appelé nombre dérivée de f en a. (ci-dessous $a = 2$)
Il est noté $f'(a)$.

Méthode-exemple 5

Pour déterminer graphiquement le nombre dérivé en un point.
Si l'on reprend la fonction polynôme vue précédemment :

$$f(x) = 3x^2 - 2x + 6$$

On obtient la représentation ci-dessous sur laquelle la tangente au point d'abscisse 1 est tracée :



On détermine l'équation de la tangente par lecture graphique :

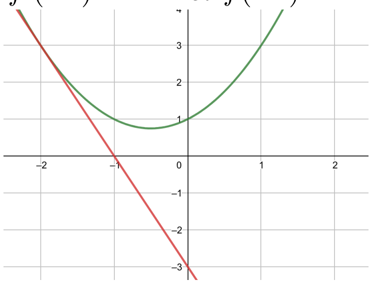
$$y = 4x + 3$$

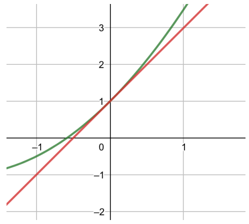
Le coefficient directeur de cette tangente en 1 est 4, donc :

$$f'(1) = 4$$

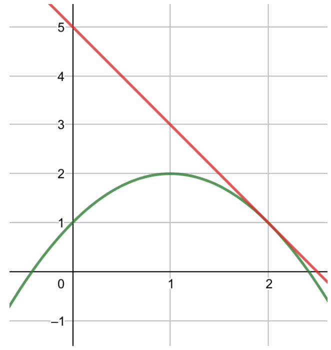
Exercice 4. .
Déterminer les nombres dérivées $f'(a)$ à partir des représentions ci-dessous ainsi que l'image $f(a)$:

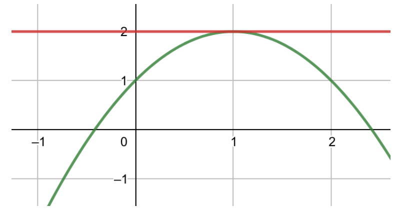
$f'(-2) =$ $\quad$ $et\ f(-2) =$





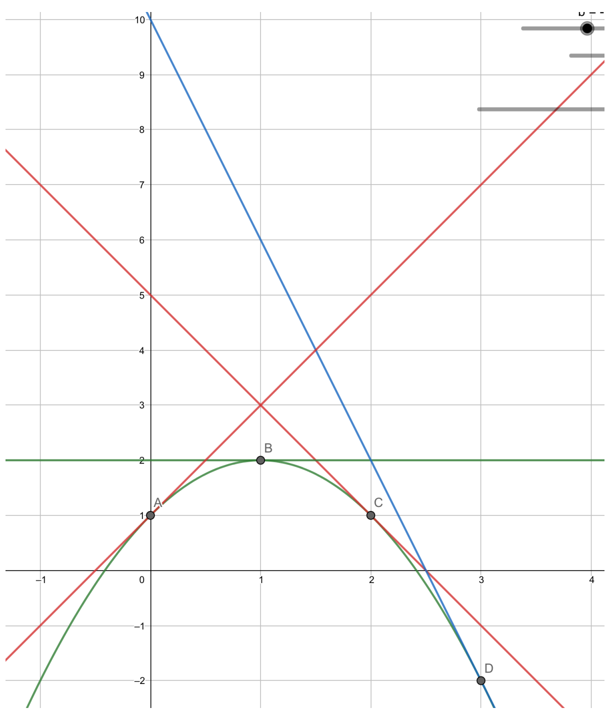
$f'(0) =$ $\quad$ $et\ f(0) =$





Exercice 5. Déterminer graphiquement les valeurs suivantes en indiquant ce quelles représentent :

- $f'(0)$.
- $f(0)$.
- $f'(1)$.
- $f(1)$.
- $f'(2)$.
- $f(2)$.
- $f'(3)$.
- $f(3)$.



V Tangente et fonction dérivée.

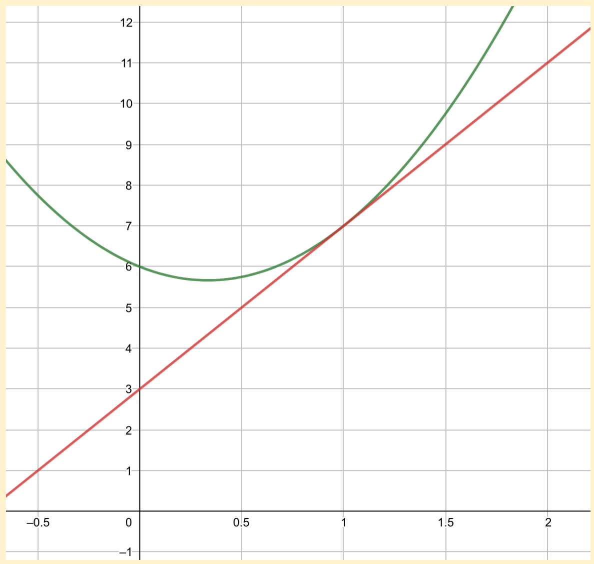
A Tangente, fonction dérivée et nombre dérivée.

Méthode-exemple 6

Détermination du nombre dérivé par le calcul :
Si l'on reprend la fonction polynôme vue précédemment :

$$f(x) = 3x^2 - 2x + 6$$

On obtient la représentation ci-dessous sur laquelle,la tangente au point d'abscisse 1 est tracée :



On détermine l'équation de la tangente par lecture graphique :

$$y = 4x + 3$$

Le coefficient directeur de cette tangente en 1 est 4, donc :

$$f'(1) = 4$$

Or nous avions trouvé comme fonction dérivée :

$$f'(x) = 6x - 2$$

Donc nous pouvons aussi obtenir le coefficient directeur de la tangente en 1 par le calcul :

$$f'(1) = 6 \times 1 - 2 = 4$$

Nous avons donc vu ici deux méthodes pour obtenir le nombre dérivée de f en 1 :

- Lecture graphique du coefficient directeur.
- Utilisation de l'expression de $f'(x)$.

Exercice 6. On considère la fonction polynômiale du second degré :

$$f(x) = -x^2 + 2x + 1$$

On a dessiné la représentation graphique de cette fonction dans l'exercice précédent.
Déterminer par le calcul les valeurs suivantes :

- $f'(0)$.
- $f(0)$.
- $f'(1)$.
- $f(1)$.
- $f'(2)$.
- $f(2)$.
- $f'(3)$.
- $f(3)$.

Pour cela vous reproduirez et compléterez le tableau ci-dessous :

x	0	1	2	3
$fx)$				
$f'(x)$				

B Équation de la tangente.

Proposition 2

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I, et $a \in I$.
Alors, l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f au point d'abscisse a est :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a) \ .$$

Méthode-exemple 7

Détermination de la tangente à une courbe par le calcul.
Pour déterminer l'équation de la tangente en 1 de la représentation graphique de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 3x^2 - 2x + 6$$

On commence par déterminer la fonction dérivée :

$$f'(x) = 6x - 2$$

Ensuite on détermine les valeurs :

$$f(1) = 3 \times 1^2 - 2 \times 1 + 6 = 7 \qquad et \qquad f'(1) = 6 \times 1 - 2 = 4$$

Puis l'on applique la forme précédente :

$$T_1 : y = f'(1)(x - 1) + f(1) = 4(x - 1) + 7 = 4x + 3$$

On peut vérifier que l'on obtient bien l'équation trouvé graphiquement précédemment.

Exercice 7. Déterminer les équation des tangentes à la courbe représentatives de la fonction f définie par $f(x) = -x^2 + 2x + 1$ au points d'abscisses 0 puis 1 puis 2 puis enfin 3.

VI Dérivation des polynômes du troisième degré.

A Fonction dérivée d'une fonction du second degré.

Méthode-exemple 8

Pour déterminer la fonction dérivée.
Soit f une fonction polynôme du troisième degré définie par :

$$f(x) = 5x^3 - 6x^2 - 3x + 4$$

. On "transforme" :

- Le x^3 en $3x^2$
- Le x^2 en $2x$
- Le x en 1
- Le "4" est simplement "annulé".

On obtient donc :

$$f'(x) = 5 \times 3x^2 - 6 \times 2x - 3 \times 1 + 0 \underbrace{=}_{simplification} 15x^2 - 12x - 3$$

B Équation de la tangente.

Méthode-exemple 9

Détermination de la tangente à une courbe par le calcul.
Pour déterminer l'équation de la tangente en -1 de la représentation graphique de la fonction définie par :

$$f(x) = 5x^3 - 6x^2 - 3x + 4$$

On commence par déterminer la fonction dérivée :

$$f'(x) = 15x^2 - 12x - 3$$

Ensuite on détermine les valeurs :

$$f(-1) = 5 \times (-1)^3 - 6 \times (-1)^2 - 3 \times (-1) + 4 = -4 \quad et \quad f'(-1) = 15 \times (-1)^2 - 12 \times (-1) - 3 = 24$$

Puis l'on applique la formule précédente :

$$T_{-1} : y = f'(-1)(x+1) + f(-1) = 24(x+1) - 4 = 24x + 20$$

C Variation d'une fonction

Méthode-exemple 10

Pour dresser le tableau de variation de f :
Soit f une fonction polynôme du troisième degré définie sur $[-1, 2]$ par :

$$f(x) = 5x^3 - 6x^2 - 3x + 4$$

. Alors, au vu du calcul précédent :

$$f'(x) = 15x^2 - 12x - 3$$

On doit maintenant déterminer le signe de la fonction dérivée qui précède. Or cette fonction est du second degré. Donc :
$1^{ière}$ **étape : On détermine le discriminant :**

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-12)^2 - 4 \times 15 \times (-3) = 324 > 0$$

$2^{ième}$ **étape : Si f' possède des racines (discriminant positif)**

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-12) - \sqrt{324}}{2 \times 15} = -0,2 \qquad et \qquad x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-12) + \sqrt{324}}{2 \times 15} = 1$$

f' est du signe de $a = 15 > 0$ à l'extérieur des racines. $3^{ième}$ **étape : On dresse le tableau de la fonction f :**

x	-1		-0.2		1		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-4	$\nearrow$	3.36	$\searrow$	0	$\nearrow$	14

$4^{ième}$ **étape : On détermine la valeur des extrema**
Ici on calcul les image de -1, -0,2, 1 et 2 pour compléter le tableau.