

Devoir maison et corrigé du devoir de TES 1 pour le 28 septembre.

Exercice 2 [ES spécifique, L spécialité] 45 min 5 pts

Maya possède 20 € dans sa tirelire au 1^{er} juin 2018.

À partir de cette date, chaque mois, elle dépense un quart du contenu de sa tirelire, puis y place 20 € supplémentaires.

Pour tout entier naturel n , on note u_n la somme d'argent contenue dans la tirelire de Maya à la fin du $n^{\text{ième}}$ mois. On a $u_0 = 20$.

1 a. Montrer que la somme d'argent contenue dans la tirelire de Maya à la fin du 1^{er} mois est de 35 €. 0,5 pt

b. Calculer u_2 . 0,5 pt

2 On admet que pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 0,75u_n + 20.$$

On considère l'algorithme suivant :

```

U ← 20
N ← 0
Tant que U < 70
    U ← 0,75 × U + 20
    N ← N + 1
Fin tant que
Afficher N
    
```

a. Recopier et compléter le tableau ci-dessous qui retrace les différentes étapes de l'exécution de l'algorithme. On ajoutera autant de colonnes que nécessaire à la place de celle laissée en pointillés. Arrondir les résultats au centième.

Valeur de U	20			
Valeur de N	0			
Condition U < 70	vrai		vrai	faux

0,5 pt

b. Quelle valeur est affichée à la fin de l'exécution de cet algorithme? Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice. 0,5 pt

3 Pour tout entier n , on pose $v_n = u_n - 80$.

a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,75. 0,5 pt

b. Préciser son premier terme v_0 . 0,5 pt

c. En déduire que, pour tout entier n :

$$u_n = 80 - 60 \times 0,75^n. \quad \text{0,5 pt}$$

d. Déterminer, au centime près, le montant que Maya possédera dans sa tirelire au 1^{er} juin 2019. 0,5 pt

e. Déterminer la limite de la suite (v_n) . 0,5 pt

f. En déduire la limite de la suite (u_n) et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice. 0,5 pt

Exercice 2 (ES spécifique, L spécialité)

1 a. Somme contenue dans la tirelire à la fin du premier mois

Maya dépense un quart du contenu, soit $\frac{20}{4} = 5$ euros et ajoute 20 euros.

À la fin du premier mois, le contenu de la tirelire est :

$$u_1 = 20 - 5 + 20$$

$$\boxed{u_1 = 35.}$$

b. Calcul de u_2

Maya dépense le quart de u_1 et ajoute 20 euros, d'où :

$$u_2 = 35 - \frac{35}{4} + 20$$

$$\boxed{u_2 = 46,25.}$$

2 a. Tableau retraçant les différentes étapes de l'algorithme

Valeur de U	20	35	46,25	54,69	61,02	65,76	69,32	71,99
Valeur de N	0	1	2	3	4	5	6	7
Condition $U < 70$	vrai	vrai	vrai	vrai	vrai	vrai	vrai	faux

b. Valeur affichée à la fin de l'exécution de cet algorithme

À la fin de l'exécution de l'algorithme, la valeur affichée est :

$$\boxed{N = 7.}$$

C'est le plus petit entier naturel n pour lequel u_n est supérieur à 70.

Le septième mois, le contenu de la tirelire sera supérieur à 70 euros.

3 Pour tout entier naturel n , $v_n = u_n - 80$.

a. La suite (v_n) est géométrique.

Pour tout entier naturel n , $v_n = u_n - 80$ et $u_n = v_n + 80$, d'où :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 80 \\ &= 0,75u_n + 20 - 80 \\ &= 0,75u_n - 60 \\ &= 0,75(v_n + 80) - 60 \\ &= 0,75v_n. \end{aligned}$$

Donc la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 0,75$.

b. Calcul du premier terme v_0

$$v_0 = u_0 - 80 = 20 - 80$$

$$\boxed{v_0 = -60.}$$

c. Expression de u_n en fonction de n

La suite (v_n) étant géométrique de raison 0,75 et de premier terme $v_0 = -60$, pour tout entier naturel n :

$$v_n = (0,75)^n \times (-60)$$

$$v_n = -60 \times 0,75^n.$$

$u_n = v_n + 80$, d'où :

$$u_n = 80 - 60 \times 0,75^n.$$

d. Montant que Maya possédera le 1^{er} juin 2019

Au 1^{er} juin 2019, soit à la fin du 12^e mois, Maya possédera dans sa tirelire :

$$u_{12} = 80 - (0,75)^{12} \times 60$$

$$u_{12} = 78,01 \text{ à } 10^{-2} \text{ près.}$$

Au 1^{er} juin 2019, Maya possédera 78,01 euros à un centième près.

e. Limite de la suite (v_n)

Le réel 0,75 appartient à $[0 ; 1[$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,75^n = 0$, d'où :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,75^n \times 60 = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0.$$

f. Limite de la suite u_n

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (80 + v_n) = 80 + \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 80$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 80.$$

Interprétation

Pour tout entier naturel n :

$$0,75^n \times 60 > 0$$

$$-0,75^n \times 60 < 0$$

$$80 - 0,75^n \times 60 < 80$$

$$u_n < 80.$$

La somme contenue dans la tirelire à la fin de chaque mois sera toujours inférieure à 80 euros.