Devoir Maison corrigé 1S1 pour le 4 mars.

Exercice 1. On considère la fonction polynômiale définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2x^3 - 6x^2 - 18x + 54$$

1. Étude du signe de f.
   (a) Déterminer $f(3) = 2 \times 3^3 - 6 \times 3^2 - 18 \times 3 + 54 = 0$
   (b) Déterminer les valeurs de a, b et c tel que

$$f(x) = (x-3)(ax^2 + bx + c)$$

   On notera $R(x) = ax^2 + bx + c$.

$$(x-3)(ax^2+bx+c) = ax^3+(b-3a)x^2+(c-3b)x-3c = f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b - 3a = -6 \\ c - 3b = -18 \\ -3c = 54 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -6 + 3 \times 2 = 0 \\ c = -18 + 3 \times 0 = -18 \\ c = \dfrac{54}{-3} = -18 \end{cases}$$

   Donc $R(x) = 2x^2 - 18 = 2(x^2 - 9) = 2(x-3)(x+3)$.
   Pour cette factorisation nous aurions pu aussi faire $\Delta = 0^2 - 4 \times 2 \times (-18) = 12^2 > 0$,
   puis $x_1 = -3$ et $x_2 = 3$ et enfin $R(x) = a(x - x_1)(x - x_2) = 2(x-3)(x=3))$
   (c) Faire un tableau de signes permettant d'étudier le signe de $f(x) = (x-3)R(x) = 2(x-3)^2(x+3)$.

x	$-\infty$		-3		3		$+\infty$
2		+		+		+	
$(x-3)^2$		+		+	0	+	
$(x+3)$		$-$	0	+		+	
$f(x)$		$-$	0	+	0	+	

2. Étude de la fonction f.
   (a) Déterminer la dérivée f' de f.

$$f'(x) = 2 \times 3x^2 - 6 \times 2x - 18 = 6x^2 - 12x - 18 = 6(x^2 - 2x - 3)$$

   (b) Étudier le signe de f' et dresser le tableau de variation de f.
   Comme $f'(-1) = 0$, on a $f(x) = 6(x+1)(x-3)$. Les deux racine de f' sont -1 et 3.
   On sait que f' (polynôme du second degré) est du signe de $a = 6 >$ à à "l'extérieur des racines". Donc :

x	$-\infty$		-3		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$			+		0	$-$	0	+	
$f(x)$		↗	0	↗	28	↘	0	↗	

   Remarque : On retrouve le tableau de signes de f que l'on a trouvé en 1 (c).
   (c) Déterminer la valeur des extrémums locaux s'il y en a.
   f admet une minimum local en 3 dont la valeur est 0 et un maximum local en -1 dont la valeur est 28.

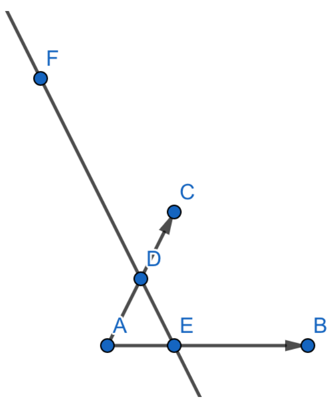
‘

Exercice 2. .

On considère le triangle ABC et les points D, E et F tels que $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BF}=2\overrightarrow{BC}$.

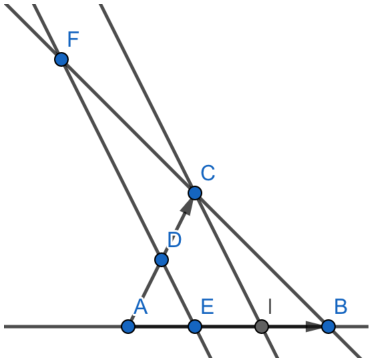
On va démontrer de trois manières différentes que D, E et F sont alignés.

1) Dans le repère $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$
   a. Déterminer les coordonnées de D, E et F.
   b. Démontrer que ces points sont alignés.
2) Avec les vecteurs
   a. Décomposer $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{DF}$ à l'aide des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
   b. Démontrer que D, E et F sont alignés.
3) Géométriquement
   a. On construit la parallèle à (DE) passant par C. Elle coupe $[AB]$ en un point I. Démontrer que E est le milieu de $[AI]$.
   b. En déduire que I est le milieu de $[EB]$.
   c. Démontrer que (CI) est parallèle à (EF) et conclure.



1. Dans le repère $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$.
   (a) Comme $\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ alors $C\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$
   Comme $\overrightarrow{AE}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ alors $E\left(\dfrac{1}{3};0\right)$
   Comme $\overrightarrow{BF}=2\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow\begin{cases}x_F-1=2(0-1)\\y_F-0=2(1-0)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_F=-1\\y_F=2\end{cases}$ Donc $F\,(-1;2)$
   (b) $C,\ E\ et\ F$ alignés $\Leftrightarrow \overrightarrow{CE}\ et\ \overrightarrow{CF}$ colinéaires $\Leftrightarrow \begin{vmatrix}\left(\dfrac{1}{3}-0\right) & (-1-0)\\ \left(0-\dfrac{1}{2}\right) & \left(2-\dfrac{1}{2}\right)\end{vmatrix}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{3}{2}-\dfrac{-1}{2}\times(-1)=0$.
   Donc E, F et C sont alignés.
2. Avec les vecteurs :
   (a) $\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AE}=\dfrac{-1}{2}\overrightarrow{AC}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$
   $\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}=\dfrac{-1}{2}\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BC}=\dfrac{-1}{2}\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{AB}+\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AC}$
   Donc $-3\overrightarrow{DE}=-3\left(\dfrac{-1}{2}\overrightarrow{AC}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}\right)=-\overrightarrow{AB}+\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DF}$
   Donc $\overrightarrow{DF}$ et $\overrightarrow{DE}$ sont colinéaires et les points C, E et F sont alignés.
3. On utilise le théorème des milieux dans le triangle ACI (ou Thalès bien sûr) . Comme $(DE)//(CI)$ et D est le milieu de $[AC]$ (puisque $\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$), on peut donc affirmer que E est le milieu de $[AI]$.

4. Donc $\overrightarrow{AE} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EI}$ Donc $\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} - \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{EI}$.
Donc I milieu de $[EB]$. Comme $\overrightarrow{BF} = 2\overrightarrow{BC}$, Le point C est milieu du segment $[BF]$. Donc dans le triangle BFE, on peut appliquer le théorème des milieux (puisque C est milieu du segment $[BF]$ et I est milieu du segment $[BE]$.) Donc $(EF)//(CI)$. Or $(ED)//(CI)$. Donc $(ED)//(EF)$. Donc (ED) et (EF) sont confondu et C, E et F sont alignés.



43 page 100

$$f(x) = x^3 + x^2 + 5x - 7$$

1. (a) $f'(x) = 3x^2 + 2x + 5$.
   (b) $\Delta = 4 - 4 \times 3 \times 5 - 56 < 0$. Donc $f'(x)$ (polynôme du second degré) n'a pas de racine et est du signe de $a = 3 > 0$.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$

2. (a) D'après le tableau de variation de f (puisque $f(1) = 0$), sur $[1; +\infty[$ on a $f(x) \geqslant 0$. Donc $g(x) = \sqrt{f(x)}$ est bien définie sur $[1; +\infty[$. Comme la fonction racine est croissante, les variation de g sont les mêmes que celles de f. Donc :

x	1	$+\infty$
$g(x)$	0	$\nearrow$

3. (a) D'après le tableau de variation de f, puisque $f(1) = 0$, la valeur 1 est l'unique solution de l'équation $f(x) = 0$. Donc $h = \dfrac{1}{f}$ est définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$. La fonction inverse étant décroissante, elle inverse les variations de f. Donc :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$h(x)$	$\searrow$	$\|\|$	$\searrow$

4. (a) Comme la fonction carré est décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et croissante sur $\mathbb{R}^+$, et que $f(x) \leqslant 0$ sur $\mathbb{R}^-$ et $f(x) \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}^+$, on obtient le tableau de variation de $k = f^2$:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$k(x)$		↘	0	↗	

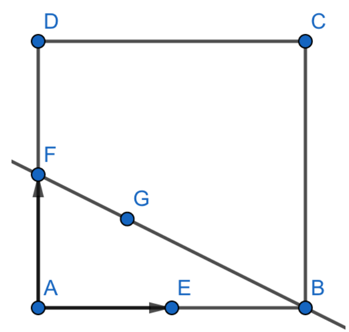
41 page 122 (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \frac{7}{2}n + \frac{23}{8}$.

a) Pour tout entier n, on a $u_{n+1} - u_n = \frac{7}{2}(n+1) + \frac{23}{8} - \left(\frac{7}{2}n + \frac{23}{8}\right) = \frac{7}{2}$ donc (u_n) est une suite arithmétique de raison $r = \frac{7}{2}$ et de premier terme $u_0 = \frac{23}{8}$.

b) On a :

$$\sum_{k=0}^{10} u_k = \sum_{k=0}^{10}\left(\frac{7}{2}k + \frac{23}{8}\right) = \frac{7}{2}\sum_{k=0}^{10} k + \sum_{k=0}^{10}\frac{23}{8} = \frac{7}{2}\frac{10\times 11}{2} + 11 \times \frac{23}{8} = \frac{1793}{8} = 224,125$$

25 page 171



a) Puisque $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AE}$, on a $B(2;0)$. Pour déterminer l'équation de la droite (BF) :

$$M(x;y) \in (BF) \Leftrightarrow \overrightarrow{BM} \text{ et } \overrightarrow{BF} \text{ colinéaires} \Leftrightarrow \text{Det}\left(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BF}\right) = \begin{vmatrix} (x-2) & (0-2) \\ (y-0) & (1-0) \end{vmatrix} = x + 2y - 2 = 0$$

Donc $(BF) : x + 2y - 2 = 0$

b) On a $\frac{2}{3} + 2 \times \frac{2}{3} - 2 = \frac{6}{3} - 2 = 0$, donc le point $G\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$ est un point de $5BF$).

c) D, E et G sont alignés $\Leftrightarrow \overrightarrow{DE}$ *et* $\overrightarrow{DG}$ colinéaires $\Leftrightarrow$ Det $\left(\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DG}\right) = \begin{vmatrix} (1-0) & \left(\frac{2}{3} - 0\right) \\ (0-2) & \left(\frac{2}{3} - 2\right) \end{vmatrix} = \frac{-4}{3} + \frac{4}{3} = 0$

Donc D, E et G sont alignés.

d) Dans le triangle ABD, E et F sont les milieux respectif de $[AB]$ et $[AD]$. Comme G est le point d'intersection de (DE) (médiane issue de D) et (BF) (médiane issue de B) (puisqu'il appartient aux deux droites, voir questions précédentes), G est le centre de gravité du triangle ABD.