Suites et séries de fonctions.

Denis Augier

INP Toulouse

13 mai 2021

1. Rappel : Définition d'une suite numérique et convergence.

2. Suites de fonctions
   - Définitions
   - Exemples :
   - Les différents types de convergence.
     - Convergence simple.
     - Convergence uniforme.
     - Convergence Cauchy-Uniforme
     - Convergence local-Uniforme
   - Convergence uniforme et continuité
   - Convergence uniforme et dérivation
   - convergence et intégration

Rappel

On appelle suite réelle une application U, définie sur $\mathbb{N}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$
Plutôt que $U : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ l'on note $U = (U_n)_n = (U_n)$ Plutôt que $\mathbb{N}$ l'ensemble de départ peut être $[\![n_0, +\infty [\![$ avec $n_0 \in \mathbb{N}$.

Soit (U_n) une suite de $\mathbb{K}$. Soit $\ell \in \mathbb{K}$, on dit que (U_n) converge vers ℓ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n \geqslant n_0, |U_n - \ell| \leqslant \varepsilon$$

Définition d'une suite de fonctions.

Notation *: On notera que $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $X \subset \mathbb{K}$ un ensemble non vide. On note $\mathscr{F}(X, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions* ***définies*** *sur X à valeurs dans $\mathbb{K}$.*

On appelle suite de fonctions une application définie sur $\mathbb{N}$ à valeurs dans $\mathscr{F}(X, \mathbb{K})$.

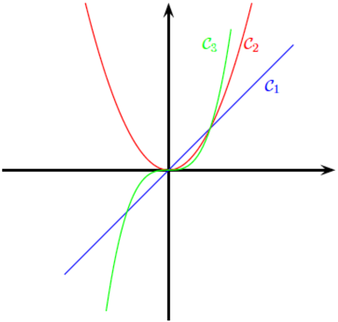
$$u : \mathbb{N} \to \mathscr{F}(X, \mathbb{K})$$

On privilégiera la notation u_n plutôt que $u(n)$ qui ici désignera une fonction.

Exemple 1 :

La suite de fonctions (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par

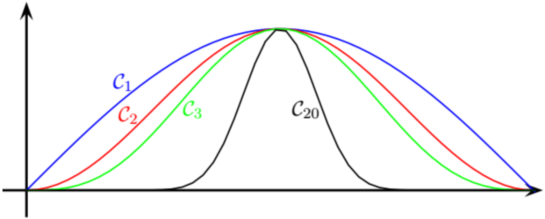
$$u_n : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^n \end{array}$$



Exemple 2 :

La suite de fonctions (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$u_n : \begin{array}{ccc} [0, \pi] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sin(x)^n \end{array}$$



Animation

Exemple 3 :

La suite de fonctions (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$u_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left(x^2 + \dfrac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}} \end{array}$$

Animation

Remarque : La fonction limite n'est pas continue.

Exemple (suite) :

Présentation des autres exemples.

Les différents types de convergence.

- La convergence simple
- La convergence uniforme
- La convergence locale-uniforme

Convergence simple

Soit (u_n) une suite de fonctions de $\mathscr{F}(X, \mathbb{K})$ et u une fonction de $\mathscr{F}(X, \mathbb{K})$. On dit que (u_n) converge simplement vers $u \in \mathscr{F}(X, \mathbb{K})$ sur X si :

$$\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, |u_n(x) - u(x)| \leqslant \varepsilon$$

Autrement dit :

$$\forall x \in X, \lim_{n \to +\infty} u_n(x) = u(x)$$

Méthode 1

Pour étudier la convergence simple, il faut *"fixer"* x dans X puis étudier la suite numérique $(u_n(x))$ avec les méthodes connues. Sil l'on reprend la suite de fonctions précédente (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$u_n \ : \ \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left(x^2 + \dfrac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}} \end{array}$$

Exemple traité au tableau

Animation

Si l'on reprend la suite de fonctions précédente (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$\begin{array}{cccc} u_n & : & [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & n^2x^n(1-x) \end{array}$$

.

Donc la suite de fonctions (u_n) tend vers la fonction nulle.

Exemple traité au tableau

Animation

Programmation suite de fonctions évaluée en un point.

```python
from numpy import *
import matplotlib.pyplot as plt

def fn(x,n):
    return (sin(x))**n

def Suite_pour_x(fn,N,x):
    Liste_valeurs=[fn(x,i) for i in range(N)]
    return Liste_valeurs

print(Suite_pour_x(fn,10,pi/2))
```

Listing 1 – Exemple d'implémentation permettant l'évaluation d'une suite de fonction en un po

Convergence uniforme.

Soit (u_n) une suite de fonctions de $\mathscr{F}(X, \mathbb{K})$ et f une fonction de $\mathscr{F}(X, \mathbb{K})$. On dit que (f_n) converge uniformément vers sur I si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \ \forall n \geqslant n_0, \ \forall x \in X, \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Dés lors (f_n) converge simplement vers f sur I

Remarque : Si l'on compare les deux définitions :

$$\text{CS} : \ \forall x \in X, \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, \quad |u_n(x) - u(x)| \leqslant \varepsilon$$

$$\text{CU} : \ \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \ \forall n \geqslant n_0, \ \forall x \in I, \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

On voit que pour la convergence simple le n_0 dépend de ε tandis que ce n'est pas le cas pour la convergence uniforme.

Convergence uniforme : définition plus pratique

Soit f une fonction de $\mathscr{F}(X, \mathbb{K})$. On notera :

$$\sup_{x \in X} (|f|) = \|f\|_{\infty, X}$$

Si f n'est pas bornée ce sup vaut $+\infty$.

(u_n) une suite de fonctions de $\mathscr{F}(X, \mathbb{K})$ et f une fonction de $\mathscr{F}(X, \mathbb{K})$.

$$(f_n) \text{ **converge uniformément** vers } f$$

$$\Leftrightarrow \left(\lim_{n \to +\infty} \|f_n - f\|_{\infty, X} = 0 \right)$$

Exemple 1 :

Si l'on reprend la suite de fonctions précédente (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$\begin{array}{rccc} u_n & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \left(x^2 + \dfrac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}} \end{array}$$

Présentation au tableau

Animation

Exemple 2 :

La suite de fonctions (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$\begin{array}{cccc} u_n & : & [0,1] & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & n^2 x^n (1-x) \end{array}$$

Présentation au tableau

Animation

Pas convaincu de l'opportunité.

Peut-être un peu plus.

Problématique

Pour une suite (u_n) de fonction continue, suivant la nature de la convergence éventuelle de la suite de (u_n) vers une fonction u, que peut-on dire de la continuité de u.

Proposition 5

Soit (u_n) une suite de fonctions de $\mathscr{F}(X, \mathbb{K})$ **continues** en $x_0 \in X$, **convergeant uniformément** vers une fonction u de $\mathscr{F}(X, \mathbb{K})$ alors u est **continue** en x_0.

Présentation au tableau

Corolaire

Soit (u_n) une suite de fonctions **continues** de $\mathscr{F}(X, \mathbb{K})$, **convergeant uniformément** vers une fonction u de $\mathscr{F}(X, \mathbb{K})$ alors u est **continue** sur X.

Justification.

Exemple 1

Si l'on reprend la suite de fonctions précédente (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$\begin{array}{rcccc} u_n & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \left(x^2 + \dfrac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}} \end{array}$$

A faire au tableau : application de la proposition

Exemple 2

Si l'on reprend la suite de fonctions (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$u_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ nx & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{n}\right] \\ 1 & \text{si } x \geqslant \frac{1}{n} \end{cases}$$

A faire au tableau : Contraposée

Problématique

Pour une suite (u_n) de fonction dérivable, suivant la nature de la convergence éventuelle de la suite de (u_n) vers une fonction u, que peut-on dire de la dérivabilité de u.

Rappel : Théorème de accroissement finis : Si f est une fonction définie de $[a, b] \subset \mathbb{R}$ et est dérivable sur $]a, b[$, alors :

$$|f(b) - f(a)| \leqslant \sup_{x \in]a,b[} |f'(x)| \times |b - a|$$

généralisation dans $\mathbb{C}$

Si f est une fonction définie de $\Sigma \subset \mathbb{C}$ un ouvert de $\mathbb{C}$ à valeur dans $\mathbb{C}$. Alors f sera dite dérivable en $z_0 \in \Sigma$, si :

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \text{ admet une limite en } \; z_0$$

Cette limite est notée $f'(z_0)$.

Si f est une fonction définie de $\Sigma \subset \mathbb{C}$ un ouvert de $\mathbb{C}$ à valeur dans $\mathbb{C}$ et est dérivable sur Σ[. Si $a, b \in \Sigma$, alors :

$$|f(b) - f(a)| \leqslant \sup_{z \in]a,b[} |f'(z)| \times |b - a|$$

Théorème : convergence d'une suite de fonctions dérivables

Soit (u_n) une suite de fonctions de $\mathscr{F}(X, \mathbb{K})$, dérivable sur X, telle que :

- La suite (u_n) converge simplement sur X vers u définie sur X,
- La suite (u'_n) converge uniformément sur X vers g définie sur X,

Alors :

- La suite (u_n) converge uniformément sur tout segment de X vers f,
- u est dérivable sur X avec $u' = g$.

Démonstration à faire au tableau ou pas ?

Corolaire

Avec les hypothèses du théorème précédent si les fonction (u_n) sont $\mathscr{C}^1$ alors u est $\mathscr{C}^1$.

Démonstration

Exemple (contre-exemple) :

On peut avoir une convergence uniforme d'une suite de fonction dérivable sans que la fonction limite soit dérivable.

Si (u_n) est une suite de fonction définie pour $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\begin{array}{rccc} u_n & : & \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \sqrt{x + \dfrac{1}{n}} \end{array}$$

Problématique

Si (f_n) est une suite de $\mathscr{F}([a,b],\mathbb{R})$ converge vers une fonction f de $\mathscr{F}([a,b],\mathbb{R})$. Quelles hypothèses sont suffisantes pour avoir :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(t)\mathrm{d}t = \int_a^b \left(\lim_{n\to+\infty} f_n\right)(t)\mathrm{d}t$$

Cas simple

Soit (f_n) une suite de fonctions de $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{K})$ (ensemble des fonction continues sur $[a,b]$) convergeant uniformément vers f sur $[a,b]$ alors f est continue sur $[a,b]$ (voir proposition 3) et :

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(t)\mathrm{d}t$$

Démonstration

Exemple

Si l'on considère la suite fonction (u_n) étudier en TD définie par :

$$f_n \quad : \quad [0,1] \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n$$

dont on a montré la convergence uniforme vers :

$$u \quad : \quad [0,1] \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$$

A traiter

Prévoir une animation.

Exemple (contre exemple)

Attention ce résultat n'est plus correct si la convergence n'est que simple.

Si l'on définie la suite (f_n) par :

$$\begin{array}{rcl} f_n : [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin \left]0, \dfrac{1}{n}\right[\\ n & \text{si } x \in \left]0, \dfrac{1}{n}\right[\end{cases} \end{array}$$

Prévoir une animation.

Théorème de convergence dominée.

Soit (f_n) une suite de intégrable sur I un intervalle de $\mathbb{R}$ à valeur dans $\mathbb{K}$, et f et φ deux fonctions de $\mathscr{C}_M(I, \mathbb{R})$ (ensemble des fonctions continues par morceau sur I) avec φ positive. On suppose :

- (f_n) converge simplement vers f sur I
- f intégrable sur tout segment inclus dans $[a, b]$.
- $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in I, \quad |f_n(t)| \leqslant \varphi(t)$
- La fonction φ est intégrable sur I.

Alors toutes les fonctions f_n et f sont intégrables sur I, et on a :

$$\int_I f(t)\mathrm{d}t = \lim_{n \to +\infty} \int_I f_n(t)\mathrm{d}t$$