DM 3 pour le 18 novembre TS1

Ex 96 page 36

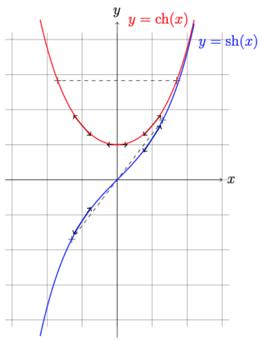
1. $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ puisque la fonction exp est définie sur $\mathbb{R}$.
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\mathrm{e}^x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{ch}x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{sh}x = +\infty$

   $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0^+$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{\mathrm{e}^x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{ch}x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{sh}x = -\infty$
3. la fonction exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc ch et sh sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

$$\mathrm{ch}'\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \mathrm{sh}\, x \quad \text{et} \quad \mathrm{sh}'\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \mathrm{ch}\, x$$

4. Comme $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^x > 0$ on a ch $x > 0$ donc :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
ch x = sh $'x$		$+$		$+$	
sh (x)	$-\infty$	$\nearrow$			$+\infty$
sh x = ch $'x$		$-$	0	$+$	
ch (x)	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$



5. On a :

$$\mathrm{ch}^2x - \mathrm{sh}^2x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2x} + 2e^xe^{-x} + e^{-2x} - \left(e^{2x} - 2e^xe^{-x} + e^{-2x}\right)}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

6. On a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{ch}^2x + \mathrm{sh}^2x &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 \\
&= \frac{e^{2x} + 2e^xe^{-x} + e^{-2x} + \left(e^{2x} - 2e^xe^{-x} + e^{-2x}\right)}{4} \\
&= \frac{2e^{2x} + 2e^{-2x}}{4} = \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} = \mathrm{ch}\ 2x
\end{aligned}$$

$$2\mathrm{ch}x\mathrm{sh}x = 2\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) \underbrace{=}_{(a+b)(a-b)=a^2-b^2} 2\ \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{4} = 2\ \mathrm{sh}\ x$$

7. $5\,\mathrm{ch}\,x - 4\,\mathrm{sh}\,x = 3 \Leftrightarrow 5\mathrm{e}^x + 5\mathrm{e}^{-x} - 4\mathrm{e}^x + 4\mathrm{e}^{-x} = 6 \Leftrightarrow \mathrm{e}^x + 9\mathrm{e}^{-x} - 6 = 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{2x} - 6\mathrm{e}^x + 9 = 0$. En posant $X = \mathrm{e}^x$ on obtient le polynôme du second degré : $X^2 - 6X + 9 = (X-3)^2$ donc $\mathrm{e}^x = 3$ donc $x = \ln 3$ est l'unique solution de cette équation.

Ex 87 page 54 :

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n^2+1}{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} n\dfrac{2+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n}} = 2$ puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} 2+\dfrac{1}{n^2} = 2\,$; $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+\dfrac{1}{n} = 1$ et enfin $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$

b) On a $\lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{X^2+5}{2X+2} \underbrace{=}_{\text{Monôme de plus heut degré.}} \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{X^2}{2X} = \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{X}{2} = +\infty$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{2n}+5}{2\mathrm{e}^n+2} = \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{X^2+5}{2X+2} = +\infty$ (en posant $X = \mathrm{e}^n$)

Ex 101 page 109

1. On a $\lim\limits_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x - 1 = -1$. On a donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$
2. (a) On a :

$$x\left(1+\frac{1}{\mathrm{e}^x-1}\right) = x\left(\frac{\mathrm{e}^x-1+1}{\mathrm{e}^x-1}\right) = \frac{x\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x-1} = f(x)$$

(b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x - 1 = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\mathrm{e}^x-1} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\dfrac{1}{\mathrm{e}^x-1} = 1$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1+\dfrac{1}{\mathrm{e}^x-1}\right) = +\infty$

Ex 68 page 132

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
f	-2	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0

Pour $f(x) = -1$ En utilisant le théorème des valeurs intermédiaires et d'après le TV de f. Puisque f est continue et strictement monotone de l'intervalle $]-\infty;0]$ sur $]-2;3]$ et $-1 \in]-2;3]$, $f(x) = -1$ admet une unique solution sur $]-2;3]$. Ensuite de même on trouve une deuxième solution pour $x = 1$.

Pour $f(x) = 0$ A l'aide du tableau de variation et du théorème des valeurs intermédiaires, on trouve 3 solutions :

- Une solution sur $]-\infty;0]$
- Une solution sur $[0;1]$
- Une solution sur $[1;+\infty[$

Pour $f(x) = 1$ A l'aide du tableau de variation et du théorème des valeurs intermédiaires, on trouve 2 solutions :

- Une solution sur $]-\infty;0]$
- Une solution sur $[0;1]$

Ex 69 page 132

a) $f'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x-1)$, donc les deux racines du polynôme f' sont 0 et 1. Ce polynôme est positif à l'extérieur des racines. D'où le tableau :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Les limites se déduise en utilisant la limite du monôme de plus haut degré.

b) D'après le TV de f et le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution et cette solution est sur l'intervalle $[1; +\infty[$

c) A l'aide le la calculatrice, on obtient :

x	1,67	1,68
f(x)	-0,051774	0,016064

Donc $1,67 < \alpha < 1,68$.

Ex 126 page 254

$$a) \qquad |z_1| = |5+2i| \times |\sqrt{3}+i\sqrt{6}| = \sqrt{29} \times \sqrt{9} = 3\sqrt{29}$$

$$b) \qquad |z_2| = \left|\left(\frac{\sqrt{3}-i}{14i}\right)^4\right| = \left|\frac{\sqrt{3}-i}{14i}\right|^4 = \left(\frac{|\sqrt{3}-i|}{|14i|}\right)^4 = \left(\frac{\sqrt{4}}{14}\right)^4 = \frac{1}{7^4}$$

Ex 135 page 225

a) On a $|iz-3| = \left|i\left(z-\frac{3}{i}\right)\right| = |i| \times \left|z+3i\right| = \left|z+3i\right|$

Donc en posant A le point d'affixe $-3i$ et M d'affixe z, on obtient :

$$|iz-3| = 2 \Leftrightarrow \left|z+3i\right| = 2 \Leftrightarrow AM = 2$$

Donc l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant l'équation précédente est le cercle de centre A et de rayon 2.

b) On a $\left|2iz-4-4i\right| = |2i| \times \left|z - \frac{4+4i}{2i}\right| = 2\left|z-(-2i+2)\right|$ et $\left|2-2iz\right| = |-2i|\left|z-\frac{2}{-2i}\right| = 2\left|z-i\right|$.

Donc en posant $A(2-2i)$ et $B(i)$, on obtient :

$$\left|2iz-4-4i\right| = \left|2-2iz\right| \Leftrightarrow \left|z-(-2i+2)\right| = \left|z-i\right| \Leftrightarrow AM = BM$$

Donc l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant l'équation précédente est la médiatrice du segment $[AB]$.