# DM sur le logarithme TS1 12 février.

## Ex 120 page 162

On note $f_n$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \ln\left(\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x} + 1\right)$$

1. (a) On a $\lim\limits_{x\mapsto -\infty} \mathrm{e}^{x} = \lim\limits_{x\mapsto -\infty} \mathrm{e}^{2x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\mapsto -\infty} f(x) = \ln 1 = 0$.
   On a $f(x) = \ln\left(\mathrm{e}^{2x}\left(1 - \mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-2x}\right)\right) = \ln\left(\mathrm{e}^{2x}\right) + \ln\left(1 - \mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-2x}\right) = 2x + \ln\left(1 - \mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-2x}\right)$.
   Or $\lim\limits_{x\mapsto +\infty} \mathrm{e}^{x} = \ln\left(1 - \mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-2x}\right) = \ln 1 = 0$. Donc $\lim\limits_{x\mapsto -\infty} f(x) = +\infty$.

   (b) $f'(x) = \dfrac{2\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x} + 1} = \dfrac{\mathrm{e}^{x}\left(2\mathrm{e}^{x} - 1\right)}{\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x} + 1}$.

   (c) Avec $X = \mathrm{e}^{x}$ le dénominateur de $f'$ est $X^2 - X + 1$ avec une discriminant négatif donc du signe de "$a$" donc positif (strictement ce qui justifie du même coup le domaine de définition de $f$). Donc $f'(x)$ est du signe du numérateur, c'est-à-dire $\mathrm{e}^{x}\left(2\mathrm{e}^{x} - 1\right)$, or $\mathrm{e}^{x} > 0$. Donc $f'(x)$ est du signe de $2\mathrm{e}^{x} - 1$ :

   $$2\mathrm{e}^{x} - 1 > 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{x} > \frac{1}{2} \Leftrightarrow x > -\ln 2$$

   (d) .

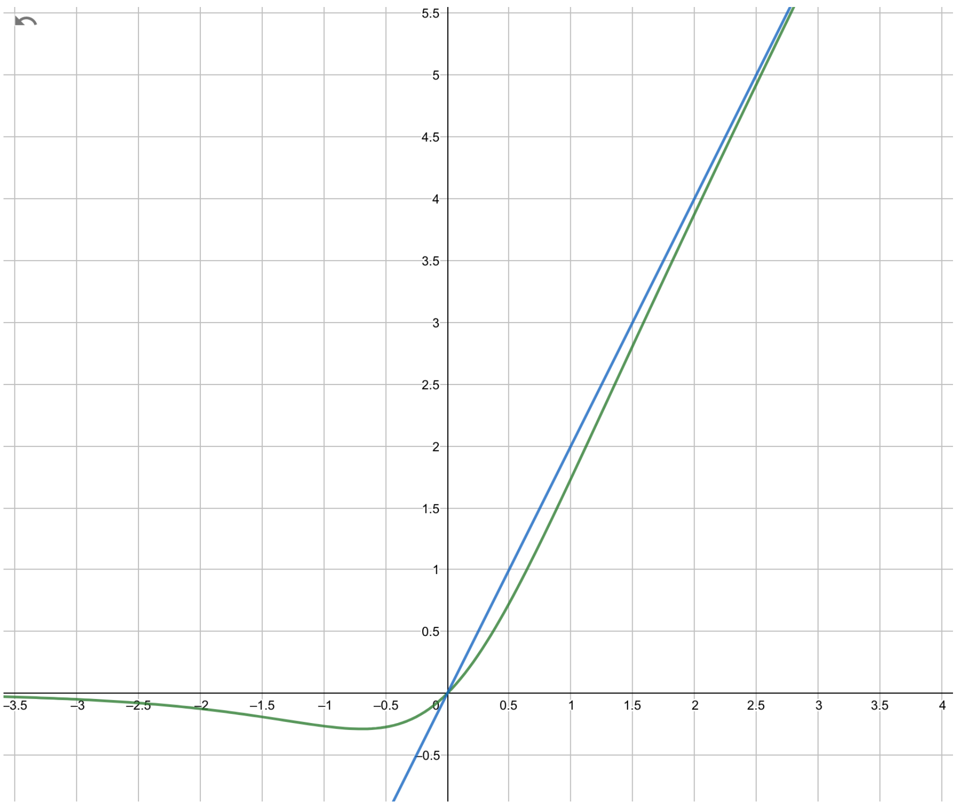
| $x$ | $-\infty$ | | $-\ln 2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $0$ | $\searrow$ | $\ln\dfrac{3}{4}$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

2. (a) $g(x) = f(x) - 2x = \ln\left(\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x} + 1\right) - \ln \mathrm{e}^{2x} = \ln\left(\dfrac{\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x} + 1}{\mathrm{e}^{2x}}\right) = \ln\left(1 - \mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-2x}\right)$ et

   $$\lim_{x\mapsto +\infty} g(x) = \lim_{x\mapsto +\infty} \ln\left(1 - \mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-2x}\right) = \ln 1 = 0$$

   (b) On peut donc en conclure que la droite d'équation $y = 2x$ est une asymptote oblique à la courbe représentatif de $f$ en $+\infty$.

3. .



4. (a) On pose $X = \mathrm{e}^x$. On a alors :
$$\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x + 1 - k = 0 \Leftrightarrow X^2 - X + 1 - k = 0$$
On obtient $\Delta = 1 - 4(1-k) = 4k - 3 \geq 0 \Leftrightarrow k \geq \dfrac{3}{4}$.
Attention, il faut que $X = \mathrm{e}^x$ donc celle les solutions strictement positives donneront des solutions.
$$X_1 = \frac{1-\sqrt{\Delta}}{2} \qquad \text{et} \qquad X_1 = \frac{1+\sqrt{\Delta}}{2}$$
On a bien $X_2 > 0$. Pour :
$$X_1 > 0 \Leftrightarrow 1 - \sqrt{\Delta} > 0 \Leftrightarrow 1 > \Delta \Leftrightarrow 1 > k$$
Donc si
- Si $k < \dfrac{3}{4}$ l'équation n'a pas solution.
- Si $k = \dfrac{3}{4}$ ou $k \geqslant 1$ l'équation une unique solution.
- Si $1 > k > \dfrac{3}{4}$ l'équation a exactement 2 solutions.

(b)
$$\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x + 1 - k = 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x + 1 = k \Leftrightarrow f(x) = \ln k$$
Donc si
- Si $\ln k < \ln \dfrac{3}{4}$ c'est-à-dire $k < \dfrac{3}{4}$ l'équation n'a pas solution.
- Si $\ln k = \ln \dfrac{3}{4}$ ou $\ln k \geqslant 0$ c'est-à-dire $k = \dfrac{3}{4}$ oiu $k \geqslant 1$ l'équation une unique solution.
- Si $0 > \ln k > \ln \dfrac{3}{4}$ c'est-à-dire $1 > k > \dfrac{3}{4}$ l'équation a exactement 2 solutions.

**Ex 158 page 256**

1. .
$$(iz + 1 + i\sqrt{3})(z^2 - 2z + 4) = 0 \Leftrightarrow \quad iz + 1 + i\sqrt{3} = 0 \quad \text{ou} \quad z^2 - 2z + 4 = 0$$
On a :
- $iz + 1 + i\sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow z = \dfrac{-1 - i\sqrt{3}}{i} = i - \sqrt{3} = b = 2\left(\dfrac{-\sqrt{3}}{2} + i\dfrac{1}{2}\right) = 2\left(\cos\left(\dfrac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)\right) = 2\mathrm{e}^{\frac{5i\pi}{6}}$
- $z^2 - 2z + 4 = 0$. On a $\Delta = 4 - 16 = -12 = (2i\sqrt{3})^2$. D'où $z_1 = 1 - i\sqrt{3}$ et :
$z_2 = a = 1 + i\sqrt{3} = 2\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\right) = 2\mathrm{e}^{\frac{i\pi}{3}}$.

2. (a) Voir question précédente.
(b) Faire le graphique.
(c) On a $OA = |a| = \left|2\mathrm{e}^{\frac{i\pi}{3}}\right| = 2$ et de même $OB = |b| = 2$. Donc $OA = OB$ et $OAB$ est isocèle en $O$.
Par ailleurs : $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}) = arg\left(\dfrac{b-0}{a-0}\right) = arg\left(\dfrac{2\mathrm{e}^{\frac{5i\pi}{6}}}{2\mathrm{e}^{\frac{i\pi}{3}}}\right) = \mathrm{e}^{i\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{3}\right)} = \mathrm{e}^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \dfrac{\pi}{2}\ (2\pi)$
Donc le triangle $OAB$ est rectangle en $O$.
(d) $k = \dfrac{a+b}{2} = \dfrac{1 - \sqrt{3} + i\left(1 + \sqrt{3}\right)}{2} = \dfrac{c}{2}$.

3. (a) Comme $k = \dfrac{c}{2}$, le point $K$ est le milieu du segment $[OC]$.
(b) Puisque les diagonales de $OACB$ se coupent en leur milieu $K$ c'est un parallélogramme. Il possède un angle droite c'est donc un rectangle. Enfin les deux côtés adjacents à $O$ sont égaux donc les 4 côtés sont égaux et $OACB$ est un carré.

**Ex 175 page 262**

1. $z_1 = \dfrac{1+i}{2}z_0 = 1 + i$ , $z_2 = \dfrac{1+i}{2}z_1 = \dfrac{1+i}{2}(1+i) = i$ , $z_3 = \dfrac{1+i}{2}z_2 = \dfrac{1+i}{2}i = \dfrac{i-1}{2}$ ,
$z_3 = \dfrac{1+i}{2}\dfrac{i-1}{2} = \dfrac{-1}{2}$

2. $u_{n+1}=\left|z_{n+1}\right|=\left|\dfrac{1+i}{2}z_n\right|=\left|\dfrac{1+i}{2}\right|\left|z_n\right|=\dfrac{1}{\sqrt{2}}u_n$. Donc $(u_n)$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et de premier terme $u_0=\left|z_0\right|=2$. Donc : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=2\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$.

3. (a) Comme $\left|\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right|<1$, on a $\lim\limits_{n\mapsto+\infty}u_n=0$.

   (b) Or $OA_n=\left|z_n\right|=u_n$, donc $\lim\limits_{n\mapsto+\infty}OA_n=0$. Donc : $\exists n_0\in\mathbb{N},\ OA_n\leq 0,01$.

   (c) .

```
u=2
while u>0.01:
        u=u/2**0.5
print n
```

4. (a)

$$\frac{z_{n+1}-z_n}{z_{n+1}}=\frac{\frac{1+i}{2}-1}{\frac{1+i}{2}}=\frac{i-1}{1+i}=\frac{(i-1)(1-i)}{2}=\frac{i+1-1+i}{2}=i$$

Donc :

$$\left\{\begin{array}{l} \left(\overrightarrow{OA_{n+1}};\overrightarrow{A_nA_{n+1}}\right)=\arg\left(\dfrac{z_{n+1}-z_n}{z_{n+1}}\right)=\arg(i)=\dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{A_nA_{n+1}}{OA_{n+1}}=\left|\dfrac{z_{n+1}-z_n}{z_{n+1}}\right|=\left|i\right|=1\quad\text{donc}\quad A_nA_{n+1}=OA_{n+1}\end{array}\right. . \qquad \text{donc } OA_nA_{n+1} \text{ est rectangle isocéle en } A_{n+1}$$

   (b) .

$$I_n=\sum_{k=0}^{n-1}A_nA_{n+1}=\sum_{k=0}^{n-1}\left|z_{n+1}-z_n\right|=\sum_{k=0}^{n-1}\left|\frac{1+i}{2}-1\right|\left|z_n\right|=\sum_{k=0}^{n-1}\underbrace{\left|\frac{i-1}{2}\right|}_{=\frac{1}{\sqrt{2}}}u_n=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k=0}^{n-1}u_n=\frac{2}{\sqrt{2}}\frac{1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}=2\frac{1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n}{\sqrt{2}-1}$$

Or $\lim\limits_{n\mapsto+\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n=0$ puisque $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)<1$. Donc $\lim\limits_{n\mapsto+\infty}I_n=\dfrac{2}{\sqrt{2}-1}$.
Le nombre de segments est infini mais la limites de la somme de leur longueur est fini.