DM sur le logarithme TS1 : exercices 144 et 151

Ex 144 page 168

On note f_n définie sur $]0;+\infty[$, avec $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$f_n(x) = x - \ln x - n$$

1. (a) $f_n'(x) = 1 - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x-1}{x}$. Or sur $]0;+\infty[$, on a $x > 0$ donc $f_n'(x)$ est du signe de $x-1$, d'où le tableau :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$1-n$	$\nearrow$	$+\infty$

On a $\lim\limits_{x\mapsto 0} \ln x = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\mapsto 0} f_n(x) = +\infty$

Puis $f_n(x) = x\left(1 - \dfrac{\ln x}{x} - \dfrac{n}{x}\right)$. Comme $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ alors $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\left(1 - \dfrac{\ln x}{x} - \dfrac{n}{x}\right) = 1$ et $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f_n(x) = +\infty$

(b) D'après le tableau de variation l'équation $f_n(x) = 0$, une sur $]0,1[$ et $]1;+\infty[$. En effet puisque f_n est continue et strictement monotone de $]0,1[$ sur $]1-n;+\infty[$ avec $0 \in]1-n;+\infty[$, en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, il existe une unique solution de $f_n(x) = 0$ sur l'intervalle $]0,1[$. Et l'on raisonne de la même façon pour la deuxième solution.

2. (a) On a :

$$f_(u_n) = 0 \Leftrightarrow u_n - \ln u_n - n = 0 \Leftrightarrow \underbrace{u_n - \ln u_n - (n+1)}_{f_{n+1}(u_n)} + 1 = 0 \Leftrightarrow f_{n+1}(u_n) = -1$$

Or $f_{n+1}(u_{n+1}) = 0 \geq -1 = f_{n+1}(u_n)$

(b) Comme f_{n+1} est strictement décroissante sur $]0,1[$ (voir 1.a)et que les suites (u_n) est à valeur dans $]0,1[$ alors d'après l'inégalité précédente $u_{n+1} < u_n$. Donc la suite (u_n) est strictement décroissante. Or elle est minorée par 0 donc elle converge. (Toute suite décroissante minorée converge)

(c)

$$f_(u_n) = 0 \Leftrightarrow u_n - \ln u_n - n = 0 \Leftrightarrow \ln u_n = u_n - n \Leftrightarrow u_n = \mathrm{e}^{u_n - n} = \frac{\mathrm{e}^{u_n}}{\mathrm{e}^n}$$

Or $0 < u_n < 1 \Rightarrow \mathrm{e}^0 < \mathrm{e}^{u_n} < \mathrm{e}^1 \Rightarrow 0 < \dfrac{\mathrm{e}^{u_n}}{\mathrm{e}^n} < \dfrac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}^n}$.

Donc $0 < u_n < \dfrac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}^n}$. Or $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} \dfrac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}^n} = 0$. Donc par le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_n = 0$

Ex 151 page 170

On note f définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$f(x) = \ln(x^2+4)$$

Partie A

1. $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2+4} \geq 0$ sur $[0;+\infty[$. Donc f est croissante sur $[0;+\infty[$.
2. $g(x) = f(x) - x$

(a) $g'(x) = f'(x) - 1 = \dfrac{2x - x^2 - 4}{x^2+4} = \dfrac{-\left[(x-1)^2+3\right]}{x^2+4}$. Or sur $[0;+\infty[$, on a $x^2+4 > 0$ et $(x-1)^2+3 > 0$ donc $g'(x) < 0$. Donc g est décroissante sur $[0;+\infty[$.

$$g(x) = \ln(x^2+4) - x = \ln(2x) + \ln\left(1 + \frac{4}{x^2}\right) - x = x\left(\frac{\ln x}{x} - 1\right) + \ln 2 + \ln\left(1 + \frac{4}{x^2}\right)$$

Or $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \dfrac{\ln x}{x} - 1 = -1$ donc $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} x\left(\dfrac{\ln x}{x} - 1\right) = -\infty$. Par ailleurs $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} 1 + \dfrac{4}{x^2} = 1$ donc $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \ln 2 + \ln\left(1 + \dfrac{4}{x^2}\right) = \ln 2 + \ln 1 = \ln 2$. Donc $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x) = -\infty$.

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$-$
$g(x)$	$\ln 4$ $\searrow$ $-\infty$

La fonction g est strictement décroissante. Or $g(2) = \ln(8) - 2 \simeq 0,08 > 0$ et $g(3) = \ln(13) - 3 \simeq -0,43 < 0$ d'après le TVI il existe une unique solution α de $g(x) = 0$ sur l'intervalle $[2, 3]$.

x	2,1	2,2
g(x)	0,029	-0,02

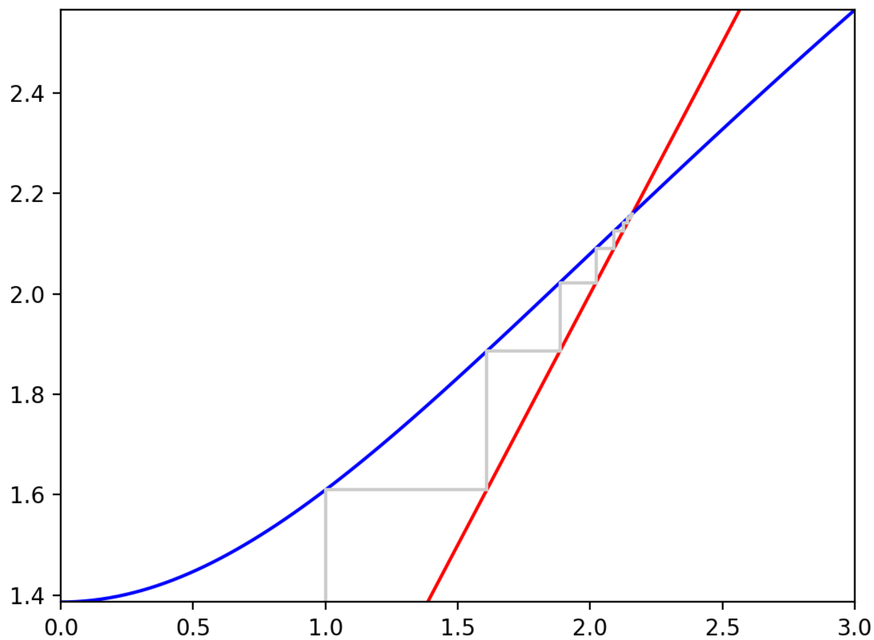
Donc $\alpha \simeq 2,2$

(b) $f(x) = x \Leftrightarrow g(x) = f(x) - x = 0$. Or g étant strictement décroissante de $[0; +\infty[$ sur $]-\infty; \ln 4]$ l'équation $g(x) = 0$ admet au plus une solution.

(c) Comme $f(x) = x \Leftrightarrow g(x) = f(x) - x = 0$, α est l'unique solution de $f(x) = x$.

Partie B

1. .



2. I est l'intersection de $\mathcal{C}_f$ et de la droite d'équation $y = x$.
3. Par récurrence $H_n \;:\; 1 \leq u_n \leq \alpha$.
   Initialisation : $1 \leq u_0 = 1 \leq \alpha$ donc H_0 est vrai.
   Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $1 \leq u_n \leq \alpha$. Comme f est une fonction croissante :
   $$1 \leq u_n \leq \alpha \Rightarrow f(1) \leq f(u_n) \leq f(\alpha) \Rightarrow 1 \leq \ln 5 \leq u_{n+1} \leq \alpha$$
   On a montré par récurrence que :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\; 1 \leq u_n \leq \alpha$$
4. Comme $u_n \leq \alpha$ alors $g(u_n) = f(u_n) - u_n = u_{n+1} - u_n \geq 0$. Donc la suite (u_n) est croissante, or elle est majorée par α donc elle converge. Dans la suite on notera L cette limite.
5. Comme f est continue, on a $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} f(u_n) = f(L)$. Or $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} f(u_n) = \lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_n = L$.
   Donc $f(L) = L$ et d'après la question 1. $L = \alpha$.