DM de 1S1 du 17 décembre 2018.

Ex 39 page 100

$$f(x) = -x^3 - 2x^2 + 4x + 3$$

1. (a) La dérivée de f :

$$f'(x) = -3x^2 - 4x + 4$$

On a :

$$\Delta = 16 - 4 \times (-3) \times 4 = 64 > 0$$

Donc $f'(x)$ possède deux racines :

$$x_1 = \frac{4+8}{2 \times (-3)} = -2 \qquad et \qquad x_1 = \frac{4-8}{2 \times (-3)} = \frac{2}{3}$$

Donc $f'(x)$ est du signe de $a = -3 < 0$ à l'extérieur des racines.

(b) On obtient donc le tableau de variation :

x	$-\infty$		-2		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-5	$\nearrow$	$\frac{121}{27}$	$\searrow$	$-\infty$

2. (a) D'après le tableau de variation l'équation $f(x) = 0$ admet exactement trois solutions :
   - Une solution sur $]-\infty, -2[$.
   - Une solution sur $\left]-2, \frac{2}{3}\right[$.
   - Une solution sur $\left]\frac{2}{3}, +\infty\right[$.

(b) Par division euclidienne :

$$\begin{array}{rrrrrrr|l}
-X^3 & - & 2X^2 & + & 4X & + & 3 & X+3 \\
\cline{8-8}
-X^3 & - & 3X^2 & & & & & -X^2+X+1 \\
\cline{1-3}
 & & X^2 & + & 4X & + & 3 & \\
 & & X^2 & + & 3X & & & \\
\cline{3-5}
 & & & & X & + & 3 & \\
 & & & & X & + & 3 & \\
\cline{5-7}
 & & & & & & 0 &
\end{array}$$

Donc :

$$f(x) = (x+3)(-x^2 + x + 1)$$

(c) pour résoudre $f(x) = 0$:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow (x+3)(-x^2+x+1) = 0 \Leftrightarrow x+3 = 0 \ ou \ -x^2+x+1 = 0$$

On calcul :

$$\Delta = 1^2 - 4 \times (-1) \times 1 = 5$$

On trouve les deux racines (nombre d'or) :

$$x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{-2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad et \qquad x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Donc l'ensemble solution de l'équation :

$$S = \left\{-3; \frac{1+\sqrt{5}}{2}; \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right\}$$

Ex 42 page 100

1. l'expression du volume :

$$V(x) = \underbrace{x^2}_{base\ AMQP} \times \underbrace{(6-x)}_{hauteur\ AI} = 6x^2 - x^3$$

2. La dérivée :

$$V'(x) = 12x - 3x^2 = 3x(4-x)$$

Les valeurs de x sont dans l'intervalle $[0, 6]$. Sur cet intervalle $x \geqslant 0$, donc $V'(x)$ est du signe de $4 - x$, donc :

x	0		4		6
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0
$f(x)$	0	$\nearrow$	32	$\searrow$	0

$$V(0) = 0 \qquad puis \qquad V(6) = 0 \qquad enfin \qquad V(4) = 32$$

3. D'après le tableau précédent, le volume est maximal pour $x = 4cm$ et le volume est alors de $32cm^3$.