DM du 25 janvier TES1 : Intégration.

Exercice 67 page 151

Soient les deux fonction définie sur $]2,+\infty[$ par :

$$F(x)=\frac{x+1}{x-2} \qquad et \qquad G(x)=\frac{-3x+9}{x-2}$$

On obtient en utilisant la formule $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$:

$$F'(x)=\frac{1\times(x-2)-(x+1)\times 1}{(x-2)^2}=\frac{x-2-x-1}{(x-2)^2}=\frac{-3}{(x-2)^2}$$

$$G'(x)=\frac{(-3)\times(x-2)-(-3x+9)\times 1}{(x-2)^2}=\frac{-3x+6+3x-9}{(x-2)^2}=\frac{-3}{(x-2)^2}$$

Donc $F'(x)=G'(x)$, donc F et G sont chacune primitive de la même fonction.

Méthode algébrique :

Par ailleurs :

$$F(x)-G(x)=\frac{x+1}{x-2}-\frac{-3x+9}{x-2}=\frac{x+1-(-3x+9)}{(x-2)}=\frac{4x-8}{x-2}=\frac{4(x-2)}{(x-2)}=4$$

Donc $F(x)=G(x)+4$, donc F et G sont chacune primitive de la même fonction.

Exercice 87 page 152

$$a)\quad \int_{-5}^{2}(x-4)\mathrm{d}x=\left[\frac{x^2}{2}-4x\right]_{-5}^{2}=\frac{2^2}{2}-4\times 2-\left(\frac{(-5)^2}{2}-4\times(-5)\right)=\frac{-77}{2}$$

$$\begin{aligned} b)\quad \int_{-1}^{1}(x^3-2x^4-x+2\mathrm{d}x &= \left[\frac{x^4}{4}-\frac{2}{5}x^5-\frac{x^2}{2}+2x\right]_{-1}^{1}\\ &=\left(\frac{1^4}{4}-\frac{2}{5}1^5-\frac{1^2}{2}+2\times 1\right)-\left(\frac{(-1)^4}{4}-\frac{2}{5}(-1)^5-\frac{(-1)^2}{2}+2\times(-1)\right)\\ &=\frac{16}{5}\end{aligned}$$

Exercice 89 page 152

$$a)\quad \int_{0}^{1}\mathrm{e}^{2x-4}\mathrm{d}x=\left[\frac{\mathrm{e}^{2x-4}}{2}\right]_0^1=\frac{\mathrm{e}^{2\times1-4}}{2}-\frac{\mathrm{e}^{2\times0-4}}{2}=\frac{\mathrm{e}^{-2}-\mathrm{e}^{-4}}{2}$$

$$b)\quad \int_0^2(2x+1)\mathrm{e}^{x^2+x-2}\mathrm{d}x \qquad .$$

On doit déterminer une primitive de $(2x+1)\mathrm{e}^{x^2+x-2}$ et pour cela on va vérifier quel'on peut utiliser la formule $\int u'\mathrm{e}^u=e^u$.

$$Si \quad u=x^2+x-2 \quad alors \quad u'=2x+1$$

Donc on reconnait $(2x+1)\mathrm{e}^{x^2+x-2}=u'\mathrm{e}^u$. Donc :

$$\int_0^2(2x+1)\mathrm{e}^{x^2+x-2}\mathrm{d}x=\left[\mathrm{e}^{x^2+x-2}\right]_0^2=\mathrm{e}^{2^2+2-2}-\mathrm{e}^{0^2+0-2}=\mathrm{e}^4-\mathrm{e}^{-2}$$