Correction du DM du 29 avril 2019.

Ex 15 page 216

a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \dfrac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2\right) = \dfrac{1}{2}(3^2+7^2-5^2) = \dfrac{33}{2}$ (Puisque ABCD est un parallélogramme, on a $AB = BC$)

b) $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AB}\cdot(-\overrightarrow{AC}) = \dfrac{33}{2}$

c) $\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{DA} = -AD^2 = -25$ (Puisque ABCD est un parallélogramme, on a $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$)

Ex 32 apge 217

a) $(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2 + 2\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = 9+4+10 = 23$

b) $(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v})^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2 - 2\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = 9+4-10 = 3$

c) $(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})\cdot(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}) = \|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{v}\|^2 = 9-4 = 5$

45 page 218.

a) $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\|\times\|\overrightarrow{v}\|\times\cos(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}) = 2\times 8\times\cos(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}) = 8\sqrt{2} \Leftrightarrow \cos(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = \dfrac{\pi}{4} \in [0,\pi]$

b) $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\|\times\|\overrightarrow{v}\|\times\cos(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}) = 2\sqrt{3}\times 6\times\cos(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}) = -18 \Leftrightarrow \cos(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}) = \dfrac{-\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha = \dfrac{5\pi}{6} \in [0,\pi]$

c) $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\|\times\|\overrightarrow{v}\|\times\cos(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}) = \sqrt{2}\times 4\times\cos(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}) = -4 \Leftrightarrow \cos(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}) = \dfrac{-\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = \dfrac{-3\pi}{4} \in [-\pi,0]$

Ex 50 page 219

1. (a) $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix}-4-(-1)\\1-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1-(-1)\\-4-2\end{pmatrix} = -3\times 2+(-1)\times -6 = 0$, donc les vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux donc le triangle ABC est rectangle en B.

   (b) $AC^2 = (1-(-4))^2+(-4-1)^2 = 50$ et $BA^2+BC^2 = (-3)^2+(-1)^2+2^2+(-6)^2 = 50$, donc $AC^2 = BA^2+BC^2$ donc le triangle ABC est rectangle en B.

2. Avec le théorème d'Al-kachi :

$$BC^2 = AC^2+AB^2-2\times AB\times AC\cos(\widehat{BAC}) \Leftrightarrow 2^2+(-6)^2 = 3^2+1^2+5^2+(-5)^2-2\times\sqrt{10}\times\sqrt{50}\cos(\widehat{BAC})$$

$$\Leftrightarrow \cos(\widehat{BAC}) = \frac{40-10-50}{-2\sqrt{10}\sqrt{50}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \Rightarrow \widehat{BAC} = \arccos\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right) \simeq 63^\circ$$

Sinon l'on peut remarqué que comme ABC est rectangle en B, le projeté orthogonal de C sur (AB) est B, donc

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB^2 = 10 = AB\times AC\cos(\widehat{BAC}) = \sqrt{10}\sqrt{50}\cos(\widehat{BAC})$$

Et l'on conclue de la même façon. Enfin Avec la somme des angles dans un triangle, on obtient :

$$\widehat{BCA} = 180-\widehat{ABC}-\widehat{BAC} \simeq 27^\circ$$