Correction DM 7 du 21 janvier.

42 **1. a.** $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\2\\7\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}6\\4\\2\end{pmatrix}$.

b. $\frac{6}{-3}=-2$, mais $2\times(-2)\neq 4$, donc il n'existe aucun réel k tel que $\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont donc pas colinéaires et, par suite, les points A, B et C ne sont pas alignés. Ils définissent donc un plan.

2. a. $\vec{n}$ est normal au plan (ABC) est équivalent à :

$$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0\\\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-3a+2b+7c=0\\6a+4b+2c=0\end{cases}.$$

b. $$\begin{cases}-3a+2b+7c=0\\6a+4b+2c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-3a+2b+7c=0\\8b+16c=0 \qquad (\mathbf{2})+\mathbf{2}\times(\mathbf{1})\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-3a-4c+7c=0\\b=-2c\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-3a+3c=0\\b=-2c\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a=c\\b=-2c\end{cases}$$

c. $\vec{n}_1(1\,;-2\,;1)$, $\vec{n}_2(3\,;-6\,;3)$ et $\vec{n}_3(2\,;-4\,;2)$ sont trois vecteurs normaux au plan (ABC).

d. Les coordonnées d'un vecteur normal au plan (ABC) peuvent s'écrire sous la forme $\begin{pmatrix}c\\-2c\\c\end{pmatrix}$ avec c un réel quelconque.

72 **1.** $\overrightarrow{RS}\begin{pmatrix}2\\-1\\-5\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{RT}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$, il n'existe donc aucun réel k tel que $\overrightarrow{RS}=k\overrightarrow{RT}$, car $\frac{2}{1}=2$, mais $2\times 2\neq -1$. Les vecteurs $\overrightarrow{RS}$ et $\overrightarrow{RT}$ ne sont donc pas colinéaires et, par suite, les points R, S et T ne sont pas alignés : ils définissent donc bien un plan.

2. $\overrightarrow{UV}\begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{UV}\cdot\overrightarrow{RS}=-4-1+5=0$

et $\overrightarrow{UV}\cdot\overrightarrow{RT}=-2+2+0=0$.

Le vecteur $\overrightarrow{UV}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (RST).

On en déduit que le vecteur $\overrightarrow{UV}$ est normal au plan (RST) et que la droite (UV) est orthogonale à ce même plan.

3. $\overrightarrow{RV}\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix}$ et $\frac{1}{5}\overrightarrow{RS}-\frac{2}{5}\overrightarrow{RT}\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix}$.

4. Le point R appartient au plan (RST) et le vecteur $\overrightarrow{RV}$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire de deux vecteurs du plan (RST). On en déduit que le point V appartient au plan (RST).

5. On peut déduire des questions **3.** et **4.** que le point V est le projeté orthogonal du point U sur le plan (RST).

6. La distance du point U au plan (RST) est donc la distance :

$$UV=\sqrt{(-2)^2+1^2+(-1)^2}=\sqrt{6}.$$

74 **1.** $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\0\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}4\\0\\-1\end{pmatrix}$, donc il n'existe aucun réel k tel que $\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$ car $\dfrac{4}{2}=2$, mais $-2\times 2\neq -1$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et les points A, B et C ne sont pas alignés : ils définissent donc bien un plan.

2. $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AC}=0$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{GA}=-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}.$

Le vecteur $\overrightarrow{AG}$ est une combinaison linéaire de deux vecteurs fixés de l'espace et A un point fixe de l'espace, il existe donc un unique point G de l'espace vérifiant $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=0$.

3. a. Voir la question **2.**

b. Le point A appartient au plan (ABC) et le vecteur $\overrightarrow{AG}$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire de deux vecteurs du plan (ABC). On en déduit que le point G appartient au plan (ABC).

4. a.
$$\begin{aligned}MA^2+MB^2+MC^2&=\overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MB}^2+\overrightarrow{MC}^2\\&=(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA})^2+(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB})^2\\&\quad+(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC})^2\\&=3MG^2+GA^2+GB^2+GC^2\\&\quad+2MG\cdot(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC})\\&=3MG^2+GA^2+GB^2+GC.\end{aligned}$$

De plus, $\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$,

donc $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_G+1\\y_G-1\\z_G\end{pmatrix}$.

Ainsi, on obtient $G(1\,;1\,;-1)$.

Or $GA^2=2^2+(-1)^2=5$; $GB^2=(-1)^2=1$ et $GC^2=2^2=4$.

Ainsi, $GA^2+GB^2+GC^2=10$.

D'où $M\in\mathscr{E}\Leftrightarrow MA^2+MB^2+MC^2=13$

$\Leftrightarrow 3MG^2+GA^2+GB^2+GC^2=13$

$\Leftrightarrow 3MG^2+10=13$

$\Leftrightarrow MG^2=1\Leftrightarrow MG=1$,

car MG est une longueur donc positive.

b. D'après l'équivalence précédente, l'ensemble $\mathscr{E}$ est la sphère de centre G et de rayon 1.