Correction DM 7 du 21 janvier.

52 **1.** D'après le théorème de Thalès :

$\frac{30-h}{30} = \frac{r}{10} \Leftrightarrow 30 - h = 3r \Leftrightarrow h = 30 - 3r \Leftrightarrow h = 3(10-r)$.

$V(r) = \pi r^2 (3(10-r)) = 3\pi r^2 (10-r)$

2. $V(r)$ est une fonction définie et dérivable sur $[0\,;10]$.

$V'(r) = 6\pi r(10-r) - 3\pi r^2 = 3\pi r(20-3r)$

3. Pour tout $r \in [0\,;10]$, $3\pi r \geqslant 0$ et $20 - 3r \geqslant 0 \Leftrightarrow r \leqslant \frac{20}{3}$. La fonction V' est positive sur $\left[0\,;\frac{20}{3}\right]$ et négative sur $\left[\frac{20}{3}\,;10\right]$.

La fonction V est croissante sur $\left[0\,;\frac{20}{3}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{20}{3}\,;10\right]$.

4. La fonction V admet un maximum atteint en $r = \frac{20}{3}$. Le volume du cylindre est donc maximal lorsque la valeur de son rayon est égale à $\frac{20}{3}$.

89 **1.** La fonction g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$g'(x) = -x^3 + 3x^2 - 3x + 1$

2. La fonction h est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$h'(x) = -3x^2 + 6x - 3 = -3\left(x^2 - 2x + 1\right) = -3(x-1)^2$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h'(x) \leqslant 0$. On en déduit que la fonction h est décroissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
Signe de $h(x)$	↘	

3. En remarquant que $h(1) = 0$, on déduit de la question précédente que la fonction h est positive sur l'intervalle $]-\infty\,;1]$ et négative sur $[1\,;+\infty[$.

En remarquant que $g'(x) = h(x)$, on détermine le tableau de variation de la fonction g.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
Signe de $g'(x)$		+	0	−	
Variations de $g(x)$		↗	$\frac{5}{4}$	↘	

4. On a $g'(1) = 0$, la courbe $\mathscr{C}_g$ admet donc une tangente horizontale au point d'abscisse 1.

5. Si la courbe $\mathscr{C}_g$ admet une tangente parallèle à la droite d'équation $y = -5x + 3$ alors l'abscisse du point de tangence est solution de l'équation $g'(x) = -5$.

La fonction g' est continue, dérivable et strictement décroissante sur $[1;3]$ avec

$g'(1) = 0 > -5$ et $g'(3) = -8 < -5$. D'après le tableau de variation de g', il existe un unique réel $\alpha \in [1;3]$ tel que $g'(\alpha) = -5$ et au point de coordonnées $(\alpha\,; g(\alpha))$ la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = -5x + 3$.