Correction DM 7 du 21 janvier.

55 **1.** L'inéquation est définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

$2(\ln(x))^2 \leqslant 5\ln(x) \Leftrightarrow \ln(x)[2\ln(x)-5] \leqslant 0$.

Or, $\ln(x)>0 \Leftrightarrow x>1$ et $2\ln(x)-5>0 \Leftrightarrow \ln(x)>\dfrac{5}{2}$

$\Leftrightarrow x>e^{\frac{5}{2}}$.

x	0		1		$e^{\frac{5}{2}}$		$+\infty$
$\ln(x)$		$-$	0	$+$		$+$	
$2\ln(x)-5$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc $S=\left[1;e^{\frac{5}{2}}\right]$.

2. $x-2>0 \Leftrightarrow x>2$. On en déduit que l'inéquation est définie sur l'intervalle $]2\,;+\infty[$. Ainsi, pour $x>2$, $x\ln(x-2)$ est du signe de $\ln(x-2)$. Or $\ln(x-2)<0 \Leftrightarrow x<3$.

Donc $S=\,]2\,;3[$.

3. L'inéquation est définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

$\ln(x)-1>0 \Leftrightarrow x>e$ et $3-\ln(x)>0 \Leftrightarrow \ln(x)<3 \Leftrightarrow x<e^3$.

x	0		e		e^3		$+\infty$
$\ln(x)-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$3-\ln(x)$		$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc $S=\left[e\,;e^3\right]$.

76 **Partie A :**

1. $\lim\limits_{x\to 0} x+2=2$ et $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x)=0$.

Par différence, $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=2$.

$g(x)=x\left(1+\dfrac{2}{x}-\ln(x)\right)$.

Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}-\ln(x)\right)=-\infty$.

Par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$.

2. Pour tout réel $x>0$, $g'(x)=-\ln(x)$.

$-\ln(x)>0 \Leftrightarrow \ln(x)<0 \Leftrightarrow x<1$.

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	2	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

3. Sur l'intervalle $]0;1]$, g est strictement croissante $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=2$ donc l'équation $g(x)=0$ n'admet pas de solution sur cet intervalle.

Sur l'intervalle $[1;+\infty[$, la fonction g est continue et strictement décroissante. $g(1)=3$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$, $0\in\,]-\infty\,;3]$, donc d'après le cas particulier du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel α appartenant à l'intervalle $[1;+\infty[$ tel que $g(\alpha)=0$.

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

Partie B :

1. Pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x}(2+x) - \ln(x)}{(2+x)^2}$

$$= \frac{2+x-x\ln(x)}{x(2+x)^2}$$

$$= \frac{g(x)}{x(2+x)^2}.$$

2. $g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha + 2 - \alpha\ln(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha + 2 = \alpha\ln(\alpha)$, donc $f(\alpha) = \dfrac{\ln(\alpha)}{2+\alpha} = \dfrac{\ln(\alpha)}{\alpha\ln(\alpha)} = \dfrac{1}{\alpha}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 0} 2 + x = 2$. Par quotient, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$.

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x} \times \frac{x}{2+x}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{2+x} = 1$. Par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

4.

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\dfrac{1}{\alpha}$	$\searrow$	0

5. À la calculatrice, on trouve $4{,}31 \leqslant \alpha \leqslant 4{,}32$.

.

90 **1.** $f(1) = 2$ et $f'(1)$ est le coefficient directeur de la droite $(\mathscr{C}B)$ qui est parallèle à l'axe des abscisses donc $f'(1) = 0$.

2. $f'(x) = \dfrac{\left(0 + b \times \frac{1}{x}\right) \times x - (a + b\ln x) \times 1}{x^2} = \dfrac{b - (a + b\ln x)}{x^2}$

$$= \frac{(b-a) - b\ln x}{x^2}.$$

3. $f(1) = 2 \Leftrightarrow \dfrac{a + b\ln(1)}{1} = 2 \Leftrightarrow a = 2$.

$f'(1) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{(b-2) - b\ln(1)}{1^2} = 0 \Leftrightarrow b - 2 = 0 \Leftrightarrow b = 2$.