Correction DM 8 du 28 janvier.

72 **1.** $AP^2 = \left(\frac{1}{3}a\right)^2 = \frac{a^2}{9}$; $AR^2 = \left(\frac{2}{3}a\right)^2 = \frac{4a^2}{9}$.

$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AR} = AP \times AR \times \cos(\hat{A}) = \frac{1}{3}a \times \frac{2}{3}a \times \cos(60°) = \frac{a^2}{9}$.

D'après le théorème d'Al-Kashi :

$$PR^2 = AP^2 + AR^2 - 2 \times AP \times AR \times \cos(\hat{A})$$
$$= \frac{a^2}{9} + \frac{4a^2}{9} - 2 \times \frac{a}{3} \times \frac{2a}{3} \times \cos(60°) = \frac{a^2}{3}.$$

2. De la même manière qu'à la question **1**, on démontre que $RQ^2 = PQ^2 = \frac{a^2}{3}$. Or RQ, PR et PQ sont des grandeurs positives donc $RQ = PR = PQ = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ et le triangle PQR est équilatéral.

97 **1. a.** $\overrightarrow{AK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AK} + \frac{2}{3}\overrightarrow{KB}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AK} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{KB} \Leftrightarrow \frac{1}{3}\overrightarrow{AK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{KB}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AK} = 2\overrightarrow{KB} \Rightarrow \|\overrightarrow{AK}\| = 2\|\overrightarrow{KB}\| \Leftrightarrow KA = 2KB$

Le point K appartient à (E).

$\overrightarrow{AL} = 2\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AL} = 2\overrightarrow{AL} + 2\overrightarrow{LB} \Leftrightarrow -\overrightarrow{AL} = 2\overrightarrow{LB} \Leftrightarrow \overrightarrow{LA} = 2\overrightarrow{LB}$

$\Rightarrow \|\overrightarrow{LA}\| = 2\|\overrightarrow{LB}\| \Leftrightarrow LA = 2LB$.

Le point L appartient à (E).

b. De la question précédente, on a :

$\overrightarrow{AK} = 2\overrightarrow{KB} \Leftrightarrow -\overrightarrow{AK} + 2\overrightarrow{KB} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} = 0$;

$\overrightarrow{LA} = 2\overrightarrow{LB} \Leftrightarrow \overrightarrow{LA} - 2\overrightarrow{LB} = 0$.

2. a. $\left(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}\right) \cdot \left(\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \|\overrightarrow{MA}\|^2 - 2\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MA} - 4\|\overrightarrow{MB}\|^2$

$\Leftrightarrow \|\overrightarrow{MA}\|^2 = 4\|\overrightarrow{MB}\|^2 \Leftrightarrow MA = 2MB$

b. $\left(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}\right) \cdot \left(\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB}\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} = \vec{0} \\ \overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} = \vec{0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} \end{cases}$$

Il existe un unique point M du plan tel que $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ et un unique point M du plan tel que $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB}$.

L'ensemble (E) est donc constitué des deux points K et L.