# ∽ DM à rendre pour le 11 mai ∽

**EXERCICE 1** **4 points**
**Commun à tous les candidats**

*Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.*

Pour chaque question, trois réponses sont proposées et une seule d'entre elles est exacte.
**Le candidat portera sur la copie le numéro de la question suivi de la réponse choisie et justifiera son choix.**

li est attribué un point par réponse correcte et convenablement justifiée. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte. Aucun point n'est enlevé en l'absence de réponse ou en cas de réponse fausse.

Pour les questions 1 et 2, l'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.

, La droite $\mathcal{D}$ est définie par la représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{l c l} x &=& 5-2t\\ y &=& 1+3t\\ z &=& 4\end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$.

1. On note $\mathcal{P}$ le plan d'équation cartésienne $3x+2y+z-6=0$.
   **a.** La droite $\mathcal{D}$ est perpendiculaire au plan $\mathcal{P}$.
   **b.** La droite $\mathcal{D}$ est parallèle au plan $\mathcal{P}$.
   **c.** La droite $\mathcal{D}$ est incluse dans le plan $\mathcal{P}$.
2. On note $\mathcal{D}'$ la droite qui passe par le point A de coordonnées $(3~;~1~;~1)$ et a pour vecteur directeur $\vec{u} = 2\vec{\imath} - \vec{\jmath} + 2\vec{k}$.
   **a.** Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont parallèles.
   **b.** Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont sécantes.
   **c.** Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ne sont pas coplanaires.

Pour les questions 3 et 4, le plan est muni d'un repère orthonormé direct d'origine O.

1. Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des points $M$ d'affixe $z$ vérifiant $|z+\text{i}| = |z-\text{i}|$.
   **a.** $\mathcal{E}$ est l'axe des abscisses.
   **b.** $\mathcal{E}$ est l'axe des ordonnées.
   **c.** $\mathcal{E}$ est le cercle ayant pour centre O et pour rayon 1.
2. On désigne par B et C deux points du plan dont les affixes respectives $b$ et $c$ vérifient l'égalité
   $\dfrac{c}{b} = \sqrt{2}\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{4}}$.
   **a.** Le triangle OBC est isocèle en O.
   **b.** Les points O, B, C sont alignés.
   **c.** Le triangle OBC est isocèle et rectangle en B.

**EXERCICE 2** **5 points**
**Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

On considère la suite $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = \frac{u_n+2}{2u_n+1}.$$

On admet que pour tout entier naturel $n$, $u_n > 0$.

1. **a.** Calculer $u_1, u_2, u_3, u_4$. On pourra en donner une valeur approchée à $10^{-2}$ près.
   **b.** Vérifier que si $n$ est l'un des entiers 0, 1, 2, 3, 4 alors $u_n - 1$ a le même signe que $(-1)^n$.
   **c.** Établir que pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} - 1 = \dfrac{-u_n+1}{2u_n+1}$.
   **d.** Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n$, $u_n - 1$ a le même signe que $(-1)^n$
2. Pour tout entier naturel $n$, on pose $v_n = \dfrac{u_n-1}{u_n+1}$.
   **a.** Établir que pour tout entier naturel $n$, $v_{n+1} = \dfrac{-u_n+1}{3u_n+3}$.

**b.** Démontrer que la suite $(v_n)$ est une suite géométrique de raison $-\dfrac{1}{3}$.

En déduire l'expression de $v_n$ en fonction de $n$.

**c.** On admet que pour tout entier naturel $n$, $u_n = \dfrac{1+v_n}{1-v_n}$.

Exprimer $u_n$ en fonction de $n$ et déterminer la limite de la suite $(u_n)$.

**EXERCICE 3**

**Commun à tous les candidats**

**Partie A**

Soit $f$ la fonction dérivable, définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = x\ln(x).$$

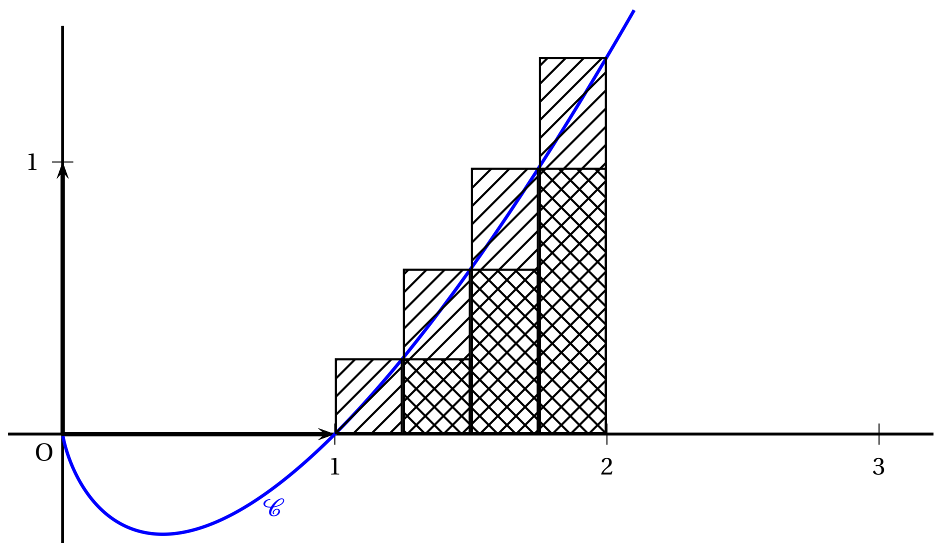
1. Déterminer les limites de $f$ en 0 et en $+\infty$.
2. On appelle $f'$ la fonction dérivée de $f$ sur $]0~;~+\infty[$. Montrer que $f'(x) = \ln(x)+1$.
3. Déterminer les variations de $f$ sur $]0~;~+\infty[$.

**Partie B**

Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction $f$ dans un repère orthonormal.

Soit $\mathscr{A}$ l'aire, exprimée en unités d'aire, de la partie du plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = 2$.

On utilise l'algorithme suivant pour calculer, par la méthode des rectangles, une valeur approchée de l'aire $\mathscr{A}$. (voir la figure ci-après).




**Algorithme :**

**Variables**
 $k$ et $n$ sont des entiers naturels
 $U, V$ sont des nombres réels
**Initialisation**
 $U$ prend la valeur 0
 $V$ prend la valeur 0
 $n$ prend la valeur 4
**Traitement**
Pour $k$ allant de 0 à $n-1$
 Affecter à $U$ la valeur $U + \frac{1}{n} f\left(1+\frac{k}{n}\right)$
 Affecter à $V$ la valeur $V + \frac{1}{n} f\left(1+\frac{k+1}{n}\right)$
Fin pour
**Affichage**
 Afficher $U$
 Afficher $V$

1. **a.** Que représentent $U$ et $V$ sur le graphique précédent ?

**b.** Quelles sont les valeurs $U$ et $V$ affichées en sortie de l'algorithme (on donnera une valeur approchée de $U$ par défaut à $10^{-4}$ près et une valeur approchée par excès de $V$ à $10^{-4}$ près) ?

**c.** En déduire un encadrement de $\mathscr{A}$.

**2.** Soient les suites $(U_n)$ et $(V_n)$ définies pour tout entier $n$ non nul par :

$$\begin{array}{rcl} U_n & = & \dfrac{1}{n}\left[f(1)+f\left(1+\dfrac{1}{n}\right)+f\left(1+\dfrac{2}{n}\right)+\cdots+f\left(1+\dfrac{n-1}{n}\right)\right] \\ V_n & = & \dfrac{1}{n}\left[f\left(1+\dfrac{1}{n}\right)+f\left(1+\dfrac{2}{n}\right)+\cdots+f\left(1+\dfrac{n-1}{n}\right)+f(2)\right] \end{array}.$$

On admettra que, pour tout $n$ entier naturel non nul, $U_n \leqslant \mathscr{A} \leqslant V_n$.

**a.** Trouver le plus petit entier $n$ tel que $V_n - U_n < 0,1$.

**b.** Comment modifier l'algorithme précédent pour qu'il permette d'obtenir un encadrement de $\mathscr{A}$ d'amplitude inférieure à $0,1$ ?

**Partie C**

Soit $F$ la fonction dérivable, définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

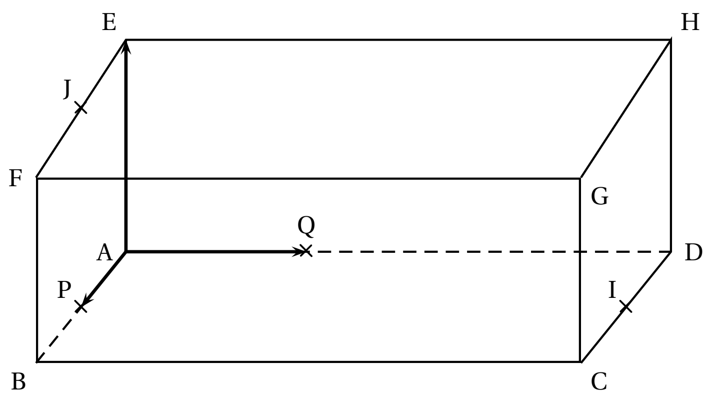
$$F(x) = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}.$$

**1.** Montrer que $F$ est une primitive de $f$ sur $]0\,;\,+\infty[$.

**2.** Calculer la valeur exacte de $\mathscr{A}$.

**EXERCICE 4**
**Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

Soit ABCDEFGH un parallélépipède rectangle tel que AB = 2, AD = 3 et AE = 1.
On appelle respectivement I, J et P les milieux respectifs des segments [CD], [EF] et [AB].
On note Q le point défini par $\overrightarrow{\text{AQ}} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{\text{AD}}$.




On appelle **plan médiateur d'un segment** le plan perpendiculaire à ce segment et passant par son milieu.
L'objectif de l'exercice est de déterminer les coordonnées du centre d'une sphère circonscrite au tétraèdre ABIJ (c'est-à-dire une sphère qui passe par les quatre points A, B, I, J).
L'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(\text{A}\,;\,\overrightarrow{\text{AP}},\,\overrightarrow{\text{AQ}},\,\overrightarrow{\text{AE}}\right)$.

**1.** Justifier que les quatre points A, B, I et J ne sont pas coplanaires.

**2.** Déterminer une équation cartésienne du plan médiateur $(P_1)$ du segment [AB].

**3.** Soit $(P_2)$ le plan d'équation cartésienne $3y - z - 4 = 0$.
Montrer que le plan $(P_2)$ est le plan médiateur du segment [IJ].

**4. a.** Démontrer que les plans $(P_1)$ et $(P_2)$ sont sécants.

**b.** Montrer que leur intersection est une droite $(\Delta)$ dont une représentation paramétrique est

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 1 \\ y & = & t \\ z & = & 3t-4 \end{array}\right. \quad \text{où } t \text{ décrit l'ensemble des nombres réels } \mathbb{R}.$$

**c.** Déterminer les coordonnées du point $\Omega$ de la droite $(\Delta)$ tel que $\Omega\text{A} = \Omega\text{I}$.

**d.** Montrer que le point $\Omega$ est centre de la sphère circonscrite au tétraèdre ABIJ.