∽ Correction du DM du 11 mai ∾

EXERCICE 1 **4 points**

1. **RÉPONSE b**.

   La droite $\mathscr{D}$ est définie par la représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{l c l} x & = & 5-2t \\ y & = & 1+3t \\ z & = & 4 \end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$.

   $\mathscr{P}$ est le plan d'équation cartésienne $3x+2y+z-6=0$. La droite $\mathscr{D}$ est déterminée par le point $B(5;1;4)$ et son vecteur directeur $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}-2\\3\\0\end{pmatrix}$, le plan $\mathscr{P}$ne contient pas B car

   $3x_A+2y_A+z_A-6=15+2+4-6\neq 0$, donc la droite $\mathscr{D}$ n'est pas incluse dans le plan $\mathscr{P}$.

   Le vecteur normal de $\mathscr{P}$ c'est $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$, on a $\overrightarrow{n}\perp\overrightarrow{v}$ puisque leur produit scalaire vaut 0 : $(-2)\times 3+2\times 3+0=0$, donc la droite $\mathscr{D}$ est parallèle au plan $\mathscr{P}$.

2. **RÉPONSE b**.

   $\mathscr{D}'$ la droite qui passe par le point A de coordonnées (3 ; 1 ; 1) et a pour vecteur directeur
   $\overrightarrow{u}=2\overrightarrow{i}-\overrightarrow{j}+2\overrightarrow{k}$.

   Les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ ne sont parallèles, car leur vecteurs directeurs ne sont pas colinéaires, les deux colonnes de coordonnées $\begin{pmatrix}2\\(-1)\\2\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}-2\\3\\0\end{pmatrix}$ ne sont pas proportionnelles.

   Donc elles sont soit sécantes, soit ne sont pas coplanaires.

   Un système d'équation paramétrique de $\mathscr{D}'$ est $\left\{\begin{array}{l c l} x & = & 3+2u \\ y & = & 1-u \\ z & = & 1+2u \end{array}\right.$, $u\in\mathbb{R}$

   On résout le système en t et u :

   $(S):\left\{\begin{array}{l c l} 3+2u & = & 5-2t \\ 1-u & = & 1+3t \\ 1+2u & = & 4 \end{array}\right.$ $(S):\left\{\begin{array}{l c l} u & = & 1,5 \\ 3+3 & = & 5-2t \\ 1-1,5 & = & 1+3t \end{array}\right.$ $(S):\left\{\begin{array}{l c l} u & = & 1,5 \\ t & = & -0,5 \end{array}\right.$

   Les deux droites sont donc sécantes au point $C(6\ ;\ -0,5\ ;\ 4)$.

Pour les questions 3 et 4, le plan est muni d'un repère orthonormé direct d'origine O.

3. **RÉPONSE a**. Soit $\mathscr{E}$ l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $|z+\mathrm{i}|=|z-\mathrm{i}|$. Si on considère D d'affixe $(-\mathrm{i})$ et F d'affixe i, alors $\mathscr{E}$ l'ensemble des points M tels que $DM=FM$ est donc la médiatrice de $[DF]$, c'est l'axe des x.

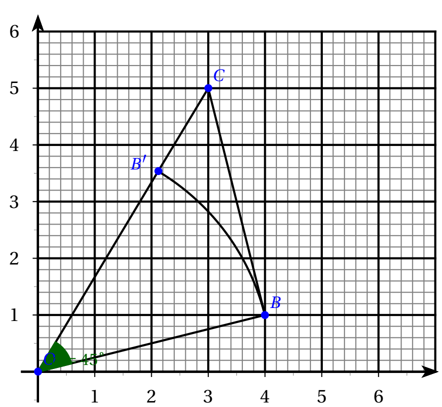
4. **RÉPONSE c**. On désigne par B et C deux points du plan dont les affixes respectives sont notées b et c, on suppose que $\dfrac{c}{b}=\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$.

   Donc en considérant les vecteurs $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$ et en utilisant module et argument de $\dfrac{z_C-z_O}{z_B-z_O}=\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$, vu que $\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ est écrit sous forme exponentielle $\left(\text{module} : \sqrt{2}, \text{argument} : \dfrac{\pi}{4}\right)$

   on en déduit que : $\dfrac{|z_C-z_O|}{|z_B-z_O|}=\sqrt{2}$ et $(\widehat{\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OC}})=\dfrac{\pi}{4}$

   Donc $OC=\sqrt{2}\times OB$ et $(\widehat{\overrightarrow{OB}\ ;\ \overrightarrow{OC}})=\dfrac{\pi}{4}$

   On peut donc tracer le dessin du triangle OBC, il suffit de choisir B (autre que O)



Le triangle OBC semble isocèle et rectangle en B, prouvons le en calculant $|0-b|$ et $|c-b[$ puis arg $\dfrac{z_O-z_B}{z_C-z_B}$, donc on va calculer $\dfrac{z_O-z_B}{z_C-z_B}$ c'est

$\dfrac{z_O-z_B}{z_C-z_B}=\dfrac{-b}{b\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}-b}$; $\qquad \frac{z_O-z_B}{z_C-z_B}=\frac{-1}{\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}-1}$;

$\dfrac{z_O-z_B}{z_C-z_B}=\dfrac{-1}{(1+\mathrm{i})-1}$ $\quad$ car $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\mathrm{i}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et que

$\sqrt{2}\sqrt{2}=2$

$\dfrac{z_O-z_B}{z_C-z_B}=\dfrac{-1}{\mathrm{i}}$

$\dfrac{z_O-z_B}{z_C-z_B}=\mathrm{i}$ car $(-1)=(\mathrm{i})^2$ et

i est de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$, donc $BO=BC$ et $\overrightarrow{BO}\perp\overrightarrow{BC}$.

Solution D. Vergès :

$\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 + \mathrm{i}$.

L'énoncé $\dfrac{c}{b} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ peut donc s'écrire : $c = b(1+\mathrm{i})$.

Pour voir si le triangle OBC est rectangle en B considérons le quotient $\dfrac{z_{BO}}{z_{BC}} = \dfrac{0-b}{c-b} = \dfrac{-b}{b+b\mathrm{i}-b} = \dfrac{-b}{b\mathrm{i}} = \dfrac{-1}{\mathrm{i}} = \mathrm{i}$.

On a donc $\dfrac{z_{BO}}{z_{BC}} = \mathrm{i}$, ce qui montre :

- en prenant les arguments des deux membres que (BO) est perpendiculaire à (BC) ;
- en prenant les modules que $\dfrac{BO}{BC} = 1$ ou encore $BO = BC$.

Le triangle OBC est donc rectangle isocèle en B.

Exercice 2 (enseignement obligatoire) — 5 points

1. **a.** $u_1 = \frac{4}{5} = 0,8$; $u_2 = \frac{14}{13} \simeq 1,08$; $u_3 = \frac{40}{41} \simeq 0,98$; $u_4 = \frac{122}{121} \simeq 1,01$.

b. On voit bien que $u_0 > 1$; $u_1 < 1$; $u_2 > 1$; $u_3 < 1$; $u_4 > 1$ donc le signe des différences $(u_n - 1)$ change à chaque rang :
si n pair c'est +
si n impair c'est −, comme $(-1)^n$.

c. $u_{n+1} - 1 = \dfrac{u_n + 2 - (2u_n + 1)}{2u_n + 1} = \dfrac{1 - u_n}{2u_n + 1} = \dfrac{-u_n + 1}{2u_n + 1}$.

d. On a admis au début de l'énoncé que tous les u_n sont strictement positifs (on pourrait le démontrer par récurrence) ; démontrons par récurrence la propriété $\mathscr{P}$: $(u_n - 1)$ a le même signe que $(-1)^n$:

L'*initialisation* est faite au b : $(u_0 - 1 > 0)$.

Hérédité : supposons que pour n entier naturel $(u_n - 1)$ ait le signe de $(-1)^n$; alors $(1 - u_n)$ a le signe opposé de $(u_n - 1)$ donc a le signe de $(-(-1)^n)$ donc de $(-1)^{n+1}$ et

$(2u_n + 1) > 0$, vu que tous les u_n sont strictement positifs, donc la fraction $\dfrac{1-u_n}{2u_n+1}$ a le signe de $(-1)^{n+1}$ et comme elle est égale à $(u_{n+1} - 1)$, on a prouvé que $(u_{n+1} - 1)$ a le signe de $(-1)^{n+1}$, l'hérédité est prouvée.

CONCLUSION : On a montré que $u_0 - 1 > 0$ et si pour n de $\mathbb{N}$, $(u_n - 1)$ a le signe de $(-1)^n$ entraîne que $(u_{n+1} - 1)$ a le signe de $(-1)^{n+1}$, donc d'après le principe de récurrence pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(u_n - 1)$ a le même signe que $(-1)^n$.

2. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$.

Vu que tous les u_n sont strictement positifs, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existe.

a. $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 1} = \dfrac{\frac{u_n+2}{2u_n+1} - 1}{\frac{u_n+2}{2u_n+1} + 1} = \dfrac{\frac{u_n+2-(2u_n+1)}{2u_n+1}}{\frac{u_n+2+2u_n+1}{2u_n+1}} = \dfrac{u_n + 2 - (2u_n + 1)}{u_n + 2 + 2u_n + 1} = \dfrac{-u_n + 1}{3u_n + 3}$.

b. $v_{n+1} = \dfrac{-u_n + 1}{3u_n + 3} = \dfrac{-1}{3}\,\dfrac{(u_n - 1)}{u_n + 1} = \dfrac{-1}{3}\,v_n$.

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc géométrique de raison $\dfrac{-1}{3}$.

$v_0 = \dfrac{u_0 - 1}{u_0 + 1} = \dfrac{1}{3}$ donc $v_n = \dfrac{1}{3} \cdot \left(\dfrac{-1}{3}\right)^n$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

c. On admet que pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{1 + v_n}{1 - v_n}$.

Donc, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $u_n = \dfrac{1 + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{-1}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{-1}{3}\right)^n}$.

Comme la suite (v_n) est géométrique de raison $q = \frac{-1}{3}$, donc $-1 < q < 1$, (v_n) tend vers 0, donc (u_n) converge vers 1.

Exercice 3 — 5 points

Commun à tous les candidats

Partie A

Soit f la fonction dérivable, définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = x\ln(x)$.

1. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

D'après le cours, on sait que $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x) = 0$ donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty\end{array}\right\}\ \lim\limits_{x\to+\infty} x\ln(x) = +\infty \text{ (par produit) donc } \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

2. On appelle f' la fonction dérivée de f sur $]0~;~+\infty[$.

La fonction f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ comme produit de fonctions dérivables :

$f'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \dfrac{1}{x} = \ln(x) + 1$.

3. Déterminer les variations de f sur $]0~;~+\infty[$. On étudie le signe de $f'(x)$ sur $]0\,;+\infty[$: $\ln(x) + 1 > 0 \Leftrightarrow \ln(x) > -1 \Leftrightarrow x > \mathrm{e}^{-1}$

Donc :

- La fonction f est strictement décroissante sur $]0\,;\,\mathrm{e}^{-1}]$;
- la fonction f est strictement croissante sur $[\mathrm{e}^{-1}\,;+\infty[$.

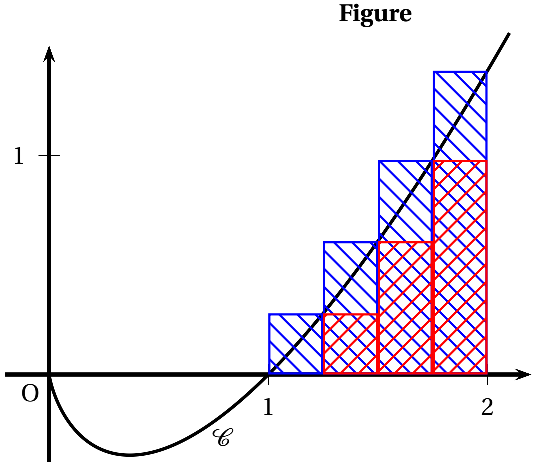
Partie B

Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal.

Soit $\mathcal{A}$ l'aire, exprimée en unités d'aire, de la partie du plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}$ et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = 2$.

On utilise l'algorithme suivant pour calculer, par la méthode des rectangles, une valeur approchée de l'aire $\mathcal{A}$. (voir la figure ci-après).

Figure



Algorithme

Variables
k et n sont des entiers naturels
U, V sont des nombres réels
Initialisation
U prend la valeur 0
V prend la valeur 0
n prend la valeur 4
Traitement
Pour k allant de 0 à $n-1$
Affecter à U la valeur $U + \frac{1}{n} f\left(1 + \frac{k}{n}\right)$
Affecter à V la valeur $V + \frac{1}{n} f\left(1 + \frac{k+1}{n}\right)$
Fin pour
Affichage
Afficher U
Afficher V

1. a. Que représentent U et V sur le graphique précédent ?

Sur la figure ci-dessus, le nombre U représente la somme des aires des rectangles inférieurs (en rouge) ; cette somme minore l'aire sous la courbe. Le nombre V représente la somme des aires des rectangles supérieurs (en bleu) ; cette somme majore l'aire sous la courbe.

b. Quelles sont les valeurs U et V affichées en sortie de l'algorithme (on donnera une valeur approchée de U par défaut à 10^{-4} près et une valeur approchée par excès de V à 10^{-4} près) ?

On fait tourner l'algorithme ci-dessus :

Variables	k	U	V	n
Initialisation		0	0	4
Traitement	0	0	0,069 8	4
	1	0,069 7	0,221 8	4
	2	0,221 7	0,466 7	4
	3	0,466 6	0,813 2	4
Affichage	On affiche la valeur de U : 0,466 6			
	On affiche la valeur de V : 0,813 2			

c. En déduire un encadrement de $\mathcal{A}$.

On peut donc en déduire que $0{,}4666 < \mathcal{A} < 0{,}8132$.

2. Soient les suites (U_n) et (V_n) définies pour tout entier n non nul par :

On admettra que, pour tout n entier naturel non nul, $U_n \leqslant \mathcal{A} \leqslant V_n$.

a. Trouver le plus petit entier n tel que $V_n - U_n < 0,1$.

Sachant que $U_n = \dfrac{1}{n}\left[f(1) + f\left(1+\dfrac{1}{n}\right) + f\left(1+\dfrac{2}{n}\right) + \cdots + f\left(1+\dfrac{n-1}{n}\right)\right]$ et que

$V_n = \dfrac{1}{n}\left[f\left(1+\dfrac{1}{n}\right) + f\left(1+\dfrac{2}{n}\right) + \cdots + f\left(1+\dfrac{n-1}{n}\right) + f(2)\right]$,

on peut dire que $V_n - U_n = \dfrac{1}{n}\big(f(2) - f(1)\big) = \dfrac{2\ln(2) - 0}{n} = \dfrac{2\ln(2)}{n}$.

$V_n - U_n < 0,1 \iff \dfrac{2\ln(2)}{n} < 0,1 \iff 2\ln(2) < 0,1\,n \iff \dfrac{2\ln(2)}{0,1} < n$

Or $\dfrac{2\ln(2)}{0,1} \approx 13,86$ donc le plus petit entier n tel que $V_n - U_n$ soit inférieur à 0,1 est 14.

Vérification : $V_{13} - U_{13} \approx 0,107 > 0,1$ et $V_{14} - U_{14} \approx 0,099 < 0,1$.

b. Comment modifier l'algorithme précédent pour qu'il permette d'obtenir un encadrement de $\mathscr{A}$ d'amplitude inférieure à 0,1 ?

Pour obtenir un encadrement de $\mathscr{A}$ d'amplitude inférieure à 0,1 dans l'algorithme, il suffit d'entrer 14 comme valeur de n; autrement dit, au lieu de « n prend la valeur 4 », on entrera « n prend la valeur 14 ».

Partie C

Soit F la fonction dérivable, définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $F(x) = \dfrac{x^2}{2}\ln x - \dfrac{x^2}{4}$.

1. Montrer que F est une primitive de f sur $]0\ ;\ +\infty[$.

$F'(x) = \dfrac{2x}{2} \times \ln(x) + \dfrac{x^2}{2} \times \dfrac{1}{x} - \dfrac{2x}{4} = x\ln(x) + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x}{2} = x\ln(x) = f(x)$

Donc F est une primitive de f sur $]0;+\infty[$.

2. Calculer la valeur exacte de $\mathscr{A}$.

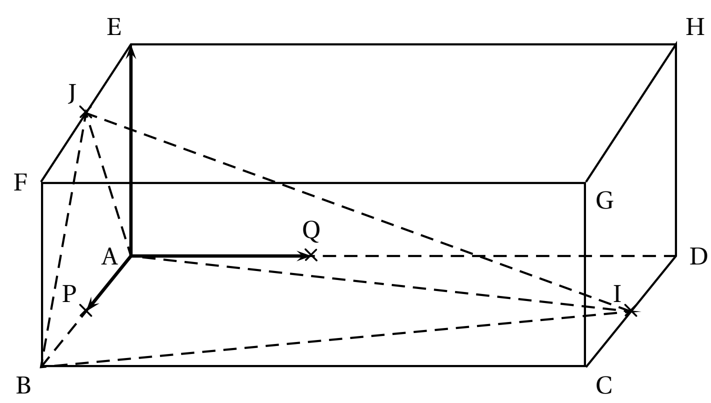
La fonction f est croissante sur $[1;2]$ et $f(1) = 0$ donc la fonction f est positive sur $[1;2]$; on peut donc dire que $\mathscr{A} = \displaystyle\int_1^2 f(t)\,\mathrm{d}t$.

$\mathscr{A} = \displaystyle\int_1^2 f(t)\,\mathrm{d}t = F(2) - F(1) = (2\ln(2) - 1) - \left(-\dfrac{1}{4}\right) = 2\ln(2) - \dfrac{3}{4}$

Exercice 4 **5 points**

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Soit ABCDEFGH un parallélépipède rectangle tel que AB = 2, AD = 3 et AE = 1.
On appelle respectivement I, J et P les milieux respectifs des segments [CD], [EF] et [AB].
On note Q le point défini par $\overrightarrow{AQ} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AD}$.



On appelle **plan médiateur d'un segment** le plan perpendiculaire à ce segment et passant par son milieu.

L'objectif de l'exercice est de déterminer les coordonnées du centre d'une sphère circonscrite au tétraèdre ABIJ (c'est-à-dire une sphère qui passe par les quatre points A, B, I, J).

L'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AP},\ \overrightarrow{AQ},\ \overrightarrow{AE}\right)$.

1. Justifier que les quatre points A, B, I et J ne sont pas coplanaires.

Les points A, B et I appartiennent au plan (ABC) ; comme J est sur l'arête [EF] qui est strictement parallèle au plan (ABC), le point J n'appartient pas au plan (ABC).

Donc les quatre points A, B, I et J ne sont pas coplanaires.

2. Déterminer une équation cartésienne du plan médiateur (P_1) du segment [AB].

Le plan médiateur (P_1) du segment [AB] est le plan perpendiculaire à [AB] passant par le milieu P de [AB] ; c'est donc l'ensemble des points M de l'espace tels que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{PM}$ soient orthogonaux.

Dans le repère $\left(A\,;\ \overrightarrow{AP},\ \overrightarrow{AQ},\ \overrightarrow{AE}\right)$, A a pour coordonnées $(0\,;0\,;0)$ et B a pour coordonnées $(2\,;0\,;0)$, donc $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(2\,;0\,;0)$.

Le point M a pour coordonnées $(x\,;y\,;z)$ et le point P a pour coordonnées $(1\,;0\,;0)$, donc $\overrightarrow{PM}$ a pour coordonnées $(x-1\,;y\,;z)$.

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{PM}$ sont orthogonaux si et seulement si $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{PM}=0 \iff (x-1)\times 2+y\times 0+z\times 0=0 \iff x-1=0$

Le plan (P_1) a pour équation $x-1=0$.

On peut aussi justifier que le plan médiateur du segment [AB] est le plan (PIJ) et que les trois points P, I et J ont pour abscisse 1 ; donc une équation du plan (PIK) est $x=1$.

3. Soit (P_2) le plan d'équation cartésienne $3y-z-4=0$.

D'après le texte, $\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AQ}$; or le point Q a pour coordonnées $(0\,;1\,;0)$ donc le point D a pour coordonnées $(0\,;3\,;0)$.

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}$; or $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(2\,;0\,;0)$ donc $\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées $(2\,;3\,;0)$. Ce sont aussi les coordonnées du point C.

Le point I est le milieu de [CD] donc le point I a pour coordonnées $\left(\dfrac{0+2}{2}\,;\dfrac{3+3}{2}\,;\dfrac{0+0}{2}\right)$ soit $(1\,;3\,;0)$.

On calcule de même les coordonnées du point J, milieu de [EF], et on trouve $(1\,;0\,;1)$

Un point M de coordonnées $(x\,;y\,;z)$ appartient au plan médiateur de [IJ] si et seulement si IM = JM autrement dit $\text{IM}^2=\text{JM}^2$.

$\text{IM}^2=(x-1)^2+(y-3)^2+z^2$; $\text{JM}^2=(x-1)^2+y^2+(z-1)^2$

$\text{IM}^2=\text{JM}^2 \iff (x-1)^2+(y-3)^2+z^2=(x-1)^2+y^2+(z-1)^2 \iff y^2-6y+9+z^2=y^2+z^2-2z+1 \iff -6y+2z+8=8 \iff 3y-z-4=0$

Le plan médiateur de [IJ] a pour équation $3y-z-4=0$ donc c'est le plan (P_2).

Montrer que le plan (P_2) est le plan médiateur du segment [IJ].

4. a. Démontrer que les plans (P_1) et (P_2) sont sécants.

Le plan (P_1) d'équation $x-1=0$ a pour vecteur normal le vecteur $\overrightarrow{n_1}$ de coordonnées $(1\,;0\,;0)$.

Le plan (P_2) d'équation $3y-z-4=0$ a pour vecteur normal le vecteur $\overrightarrow{n_2}$ de coordonnées $(0\,;3\,;-1)$.

Les vecteurs $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ ne sont pas colinéaires donc les plans (P_1) et (P_2) ne sont pas parallèles.

Les plans (P_1) et (P_2) sont donc sécants.

b. Montrer que leur intersection est une droite (Δ) dont une représentation paramétrique est :

Pour déterminer la droite d'intersection des plans (P_1) et (P_2), on résout le système

$\left\{\begin{array}{r} x-1=0\\ 3y-z-4=0\end{array}\right.$ que l'on écrit $\left\{\begin{array}{l} x=1\\ y=y\\ z=3y-4\end{array}\right.$

Donc la droite (Δ) d'intersection des plans (P_1) et (P_2) a pour représentation paramétrique : $\left\{\begin{array}{l} x=1\\ y=t\\ z=3t-4\end{array}\right.$ où $t\in\mathbb{R}$.

c. Déterminer les coordonnées du point Ω de la droite (Δ) tel que $\Omega A=\Omega I$.

Un point de (Δ) a pour coordonnées $(1\,;t\,;3t-4)$ où t est un réel.

On va donc chercher une valeur de t pour laquelle $\Omega A=\Omega I$, le point Ω étant un point de (Δ), autrement dit pour laquelle $\Omega A^2=\Omega I^2$.

$\Omega A^2=(-1)^2+(-t)^2+(-3t+4)^2$; $\Omega I^2=(1-1)^2+(3-t)^2+(-3t+4)^2$

$\Omega A^2=\Omega I^2 \iff (-1)^2+(-t)^2+(-3t+4)^2=(1-1)^2+(3-t)^2+(-3t+4)^2 \iff 1+t^2=9-6t+t^2 \iff 6t=8 \iff t=\dfrac{4}{3}$

Le point Ω de (Δ) tel que $\Omega A=\Omega I$, correspond au paramètre $t=\dfrac{4}{3}$ et a donc pour coordonnées $\left(1\,;\dfrac{4}{3}\,;3\times\dfrac{4}{3}-4\right)$ c'est-à-dire $\left(1\,;\dfrac{4}{3}\,;0\right)$.

d. Montrer que le point Ω est centre de la sphère circonscrite au tétraèdre ABIJ.

Le point Ω appartient à la droite (Δ) donc il appartient à la fois à (P_1) et à (P_2).

(P_1) est le plan médiateur de [AB] et $\Omega\in(P_1)$ donc $\Omega A=\Omega B$.

(P_2) est le plan médiateur de [IJ] et $\Omega\in(P_2)$ donc $\Omega I=\Omega J$.

De plus $\Omega A=\Omega J$; donc $\Omega A=\Omega B=\Omega I=\Omega J$:

le point Ω est le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre ABIJ.