DM TES1 du 5 novembre Fonction : Exponentielle.

Ex 83 page 55

$f(x) = (5-2x)e^x$.

1. D à pour abscisse 0 donc sont ordonnées est $f(0) = 5e^0 = 5$. Donc $D(0, 5)$
   L'ordonnée de E est nul donc pour trouver l'abscisse, il faut résoudre $f(x) = 0 \Leftrightarrow (5-2x)e^x = 0 \Leftrightarrow 5-2x = 0$ $(puisque\ e^x \neq 0) \Leftrightarrow x = \dfrac{5}{2}$.
2. $f'(x) = -2e^x + (5-2x)e^x = (-2+5-2x)e^x = (3-2x)e^x$.
3. Comme $e^x > 0$, on a $f'(x)$ du signe de $(3-2x)$. On a $3-2x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{2}$; D'où le tableau de variation :

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$2e^{\frac{3}{2}}$	$\searrow$	$-\infty$

   En effet $f\left(\frac{3}{2}\right) = 2e^{\frac{3}{2}}$
   Donc les coordonnées exactes de F sont $\left(\frac{3}{2}; 2e^{\frac{3}{2}}\right)$
4. La droite (DG) passe par le point D donc pour être tangente à $\mathcal{C}$, il suffit que son coefficient directeur soit $f'(0)$ (0 étant l'abscisse de D).
   $$f'(0) = 3e^0 = 3$$
   Et le coefficient directeur de (DG) est
   $$\frac{y_D - y_G}{x_D - x_G} = \frac{5-1,5}{0-(-1)} = 3,5$$
   Donc la droite (DG) n'est pas tangente à $\mathcal{C}$

Ex 95 page 58

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x + ke^{ax}$.

1. On lit graphiquement $g(0) = 6$ et le coefficient directeur de la tangente en 0 est $g'(0) = -2$ (on peut déterminer le coefficient directeur de la droite (EF) par l'application de la formule $\dfrac{y_F - y_E}{x_F - x_E} = \dfrac{-6}{3} = -2$).
2. On obtient :
   $$g'(x) = 1 + k \times ae^{ax}$$
3. Avec les résultats de la question 1., on obtient le système :
   $$\left\{\begin{array}{c} g(0) = k = 6 \\ g'(0) = 1 + ka = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} k = 6 \\ a = \dfrac{-3}{k} = \dfrac{-1}{2} \end{array}\right.$$
4. On étudie le signe de :
   $$f(x) - x = 6e^{\frac{-1}{2}x} > 0$$
   Donc la courbe $\mathcal{C}$ est au dessus de D.

Ex 97 page 58

1. On a :
$$f(x) = 4\frac{e^x}{e^x+1} = \frac{-4}{e^x+1} + 4 = \frac{4}{1+e^{-x}}$$
2. Donc pour
   (a) Pour déterminer la position relative de $\mathcal{C}$ et de la droite d'équation $y = 4$, on détermine le signe de :
   $$f(x) - 4 = \frac{-4}{e^x+1} + 4 - 4 = \frac{-4}{e^x+1} < 0$$
   ' En effet puisque $e^x > 0$, alors $e^x + 1 > 0$ donc $\dfrac{-4}{e^x+1} < 0$.
   On peut donc dire que $\mathcal{C}$ est en dessous de la droite horizontale d'équation $y = 4$.

   (b) On a $e^{-x} > 0$ donc $1 + e^{-x} > 0$ donc $f(x) = \dfrac{4}{1+e^{-x}} > 0$.

   (c) On utilise encore l'expression de $\dfrac{4}{1+e^{-x}} = 4\dfrac{1}{1+e^{-x}}$ et pour dériver, on utilise la formule $(\frac{1}{u})' = \frac{-u'}{u^2}$ avec $u = 1 + e^{-x}$ donc $u' = -e^{-x}$ d'où le résultat :
   $$f'(x) = 4 \times \frac{-u'}{u^2} = 4\frac{-(-e^{-x})}{(1+e^{-x})^2} = \frac{4e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$$
3. Pour que les deux tangentes soient parallèles, il faut que leur coefficient directeur respectif soit égal. En 1 le coefficient directeur est :
$$f'(1) = \frac{4e^{-1}}{(1+e^{-1})^2} = \frac{4e^{-1}}{e^{-2}(e^1+1)^2} = \frac{4e}{(e^1+1)}$$
et en -1 le coefficient directeur est :
$$f'(-1) = \frac{4e^1}{(1+e^1)^2} = f'(1)$$
Donc effectivement les deux tangentes sont parallèles.

Exercice ?

1. Pour obtenir le montant du coût fixe, il faut déterminer le coût avant d'avoir fabriquer le moindre cerfs-volants (c'est-à-dire nécessaire à l'entreprise avant toute production) :

$$C_T(0) = 2$$

Donc le montant des coût fixes de cette entreprise est 2000 €.

2. (a)
$$C_T'(x) = \frac{1}{3} \times 3x^2 - \frac{1}{4} \times 2x - \frac{1}{2} + 0 = x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$
Or $(x-1)\left(x+\frac{1}{2}\right) = x^2 = \frac{1}{2} - x - \frac{1}{2} = x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$
Donc $C_T'(x) = (x-1)\left(x+\frac{1}{2}\right)$

(b) Comme sur $[0,6]$ on a $\left(x+\frac{1}{2}\right) > 0$, sur $[0,6]$ la fonction $C_T(x)$ est du signe de $(x-1)$. D'où le tableau de variation :

x	0		1		6
$C_T'(x)$		$-$	0	$+$	
$C_T(x)$	2	$\searrow$	$\frac{19}{12}$	$\nearrow$	6

Car $C_T(1) = \frac{19}{12}$. On remarque ici que l'on a un coût total que commence par diminuer ce qui ne peut arriver que dans certains rares sujets de bac. Puisque c'est une chose totalement aberrante !!! Dans le cas où cela vous arriverez, relisez bien votre production puisque aujourd'hui cela arrive quasiment plus.

(c)