DM du 7 février TES1 : Intégration.

Exercice 108 page 108

1. (a) On a $A(0,3)$ et $B(-1,1)$, pour la droite (AB) l'ordonnée à l'origine est 3 et le coefficient directeur est :

$$a = \frac{3-1}{0-(-1)} = 2$$

Donc (AB) a pour équation : $y = 2x + 3$.

(b) Puisque A est un point de $\mathcal{C}_f$, on a $f(0) = 3$.
La droite (AB) de coefficient directeur 2 est la tangente à $\mathcal{C}_f$ en 0, donc $f'(0) = 2$.
Le point $E : (1, 3 + \ln 2)$ est un point de $\mathcal{C}_f$ donc $f(1) = 3 + \ln 2$.
La droite horizontale Δ est tangente à $\mathcal{C}_f$ en 1, donc $f'(1) = 0$.

(c) Par lecture graphique, le nombre de solution de l'équation $f(x) = 1$ est 2.

(d) Par lecture graphique :

x	-1		-3		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	$3 + \ln 2$	$\searrow$	

2. On a :

$$f(x) = ax + 5 + \frac{b}{x+1} + \ln(x+1)$$

Donc

$$f(0) = a \times 0 + 5 + \frac{b}{0+1} + \ln(0+1) = 5 + b = 3 \quad \text{donc} \quad b = -2$$

$$f(1) = a \times 1 + 5 - \frac{2}{1+1} + \ln(1+1) = a + 4 + \ln 2 = 3 + \ln 2 \quad \text{donc} \quad a = -1$$

Donc $f(x) = -x + 5 - \dfrac{2}{x+1} + \ln(x+1)$

114 page 158

1.

$$A_2 = -\int_1^5 h(x)\mathrm{d}x \quad et \quad A_1 = \int_1^5 (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x$$

2.

$$\int_1^3 \frac{1}{x}\mathrm{d}x = [\ln x]_1^3 = \ln 3$$

3. On a pour tous x sur $[1,3]$:

$$1 \leqslant g(x) \leqslant 4 \Rightarrow \int_1^4 1\mathrm{d}x \leqslant \int_1^3 g(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_1^3 4\mathrm{d}x \Rightarrow [x]_1^3 \leqslant \int_1^3 g(x)\mathrm{d}x \leqslant [4x]_1^3 \Rightarrow 2 \leqslant \int_1^3 g(x)\mathrm{d}x \leqslant 8$$

4. (a) Comme f est positive, on a :

$$\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x \geqslant 0$$

(b) Comme g est positive, alors $-g$ est négative donc :

$$\int_1^3 -g(x)\mathrm{d}x \leqslant 0$$

(c) Comme h est négative, donc :

$$\int_1^2 h(x)\mathrm{d}x \leqslant 0$$

(d) Comme sur $[1, 3]$, on a $h(x) \leqslant 0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$, on a les inégalités :

$$\int_1^3 h(x)\mathrm{d}x \leqslant 0 \leqslant \int_1^3 f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_1^3 g(x)\mathrm{d}x \quad \text{donc} \quad K \leqslant 0 \leqslant I \leqslant J$$

5. la valeur moyenne de f sur $[1, 4]$ est donnée par :

$$\frac{1}{4-1}\int_1^4 f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\left[\ln x\right]_1^4 = \frac{\ln 4}{3} = \frac{2\ln 2}{3}$$