DM exponentielle du 15 octobre 2018 : Fonction exponentielle.

Ex 54 page 49

Étude de la fonction $g(x) = x + 1 - e^x$.

1. Par lecture graphique on obtient le tableau de variation de la question 2 et on observe les positions relatives démontrées à la question 3.

   De ce tableau, on peut remarqué que la fonction g semble négative et s'annule une fois en 0 (c'est-à-dire que $g(0) = 0$).

2. Pour déterminer le sens de variation de g, on détermine sa dérivée :

$$g'(x) = 1 - e^x$$

   Puis l'on détermine le signe de la dérivée :

$$g'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow 1 \geqslant e^x \Leftrightarrow 0 \geqslant x$$

   Enfin l'on peut compléter le tableau de variation de g :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

   Dans ce tableau l'on fait apparaître la valeur de $g(0) = 0 + 1 - e^0 = 0$.
   Maintenant à la lecture du tableau, nous pouvons affirmer que la fonction g ne prend que des valeurs négatives.

3. Pour déterminer par le calcul, la position relative des deux courbes, on étudie le signe de la différence $g(x) - x$:

$$g(x) - x = 1 - e^x \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant 0$$

   Donc, on obtient les positions :

x	Sur $]-\infty; 0[$	Sur $]0; +\infty[$
Signe de $g(x) - x$	+	-
Position relative	$\mathcal{C}_g/d$	$d/\mathcal{C}_g$

   En notant $\mathcal{C}_g$ la courbe représentative de g et d celle de l'équation $y = x$.

Ex 55 page 49

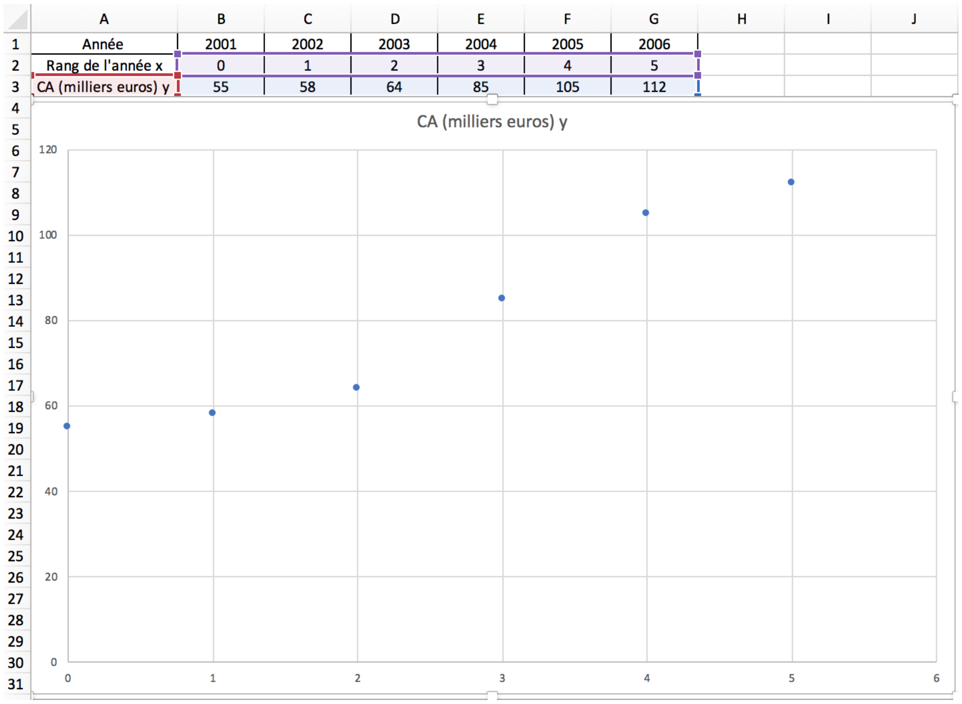
- $e^x - 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow e^x \geqslant 1 = e^0 \Leftrightarrow x \geqslant 0$
- $e^{2x} - \sqrt{e} \geqslant 0 \Leftrightarrow e^{2x} \geqslant \sqrt{e} = e^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow 2x \geqslant \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x \geqslant \dfrac{1}{4}$
- On déduit des deux questions précédentes le tableau :

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{4}$		$+\infty$
$e^x - 1$		$-$	0	$+$		$+$	
$e^{2x} - \sqrt{e}$		$-$		$-$	0	$+$	
$(e^x - 1)(e^{2x} - \sqrt{e})$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc $(e^x - 1)(e^{2x} - \sqrt{e}) \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty; 0] \cup [0; +\infty[$

Ex 85 page 56

1. .



2. On note $f(x) = ab^x$.
   (a) Puisque les points $A(0;55)$ et $B(5;112)$ doivent appartenir à la représentation $\mathcal{C}_f$, on obtient $f(0) = 55$ et $f(5) = 112$. Ce qui se traduit par les équations sur a et b :

$$\begin{cases} ab^0 = a = 55 \\ ab^5 = 112 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 55 \\ b^5 = \frac{112}{55} \simeq 2,036 \end{cases}$$

   (b) Du fait qu'une valeur approché de l'équation $x^5 = 2,036$ soit $x = 1,1528....$ On peut choisir comme valeur approchée $b = 1,15$

3. Sur $[0;12]$, $f(x) = 55 \times 1,15^x$.
   (a) Sur une période de un an le chiffre d'affaire de l'entreprise passe de $f(x)$ à $f(x+1)$. L'évolution en pourcentage est donc sur 1 an de :

$$\frac{f(x+1) - f(x)}{f(x)} = \frac{55 \times 1,15^{x+1} - 55 \times 1,15^x}{55 \times 1,15^x} = \frac{1,15^{x+1} - 1,15^x}{1,15^x} = \frac{1,15^x(1,15-1}{1,15^x} = 1,15-1 = 0,15$$

   Soit donc une augmentation de 15 %.

   (b) pour déterminer une estimation du chiffre d'affaire en juillet 2017 (c'est-à-dire pour $x = 6 + \dfrac{7}{12} \simeq 6,58$) :

$$f(6,58) \simeq 138$$

   On obtenons une estimation de 138 milles €.

   (c) pour déterminer une estimation du chiffre d'affaire en janvier 2011(c'est-à-dire pour $x = 10$) :

$$f(10) = 55 \times 1,15^{10} \simeq 222,51$$

   On obtenons une estimation de 222510 €.

4. On obtient le tableau de valeurs :

x	12,1	12,2
$f(x)$	298,4	302,6

On en déduit donc que l'entreprise dépassera le chiffre d'affaire de 300 000 € au mois de mars 2013.