DS 1 : suites numériques.

Consignes :

- Durée 1h.
- Calculatrice autorisée.
- Justifiez vos réponses.

Exercice 1. .

Les différentes parties de cet exercice sont indépendantes.

1. (a) Augmenter de 12 % revient à multiplier par $1,12$.
Donc en 2018, il y aura : $300 \times 1,12 - 18 = 318$ loups.

   (b) Pour tout entier naturel n, on note par u_n et u_{n+1} les nombres respectifs de loups les années n et $n+1$. D'après le texte, d'une année Ã l'autre le nombre de loups augmente de 12 %, puis on autorise Ã tuer 18 animaux.
Donc pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 1,12 \times u_n - 18$.

2. (a) Ci-dessous l'algorithme complété :

```
N ← 0
U ← 300
Tant que U < 600 faire
        U ← 1,12 × U − 18
        N ← N + 1
Fin Tant que
```

   (b) .

Année	2017	2018	....	2026	2027
n'	0	1	...	6	7
Population u_n	300	318	....	566	≈ 616

En 2027, le nombre de loups aura dépassé les 600 animaux.

3. (a) Pour tout entier naturel n :
$v_{n+1} = u_{n+1} - 150 = 1,12 \times u_n - 18 - 150 = 1,12 \times u_n - 168 = 1,12 \times (v_n + 150) - 168 = 1,18 v_n + 168 - 168 = 1,12 v_n$
Donc la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 1,12$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 150 = 150$.

   (b) Donc pour tout entier naturel n, $v_n = v_0 \times q^n = 150 \times 1,12^n$.
Or $u_n = v_n + 150$ donc :
$u_n = 150 \times 1,12^n + 150$.

   (c) On a $1,12 > 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 1,12^n = +\infty$. Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 150 \times 1,12^n = +\infty$. Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} 150 + 150 \times 1,12^n = +\infty$.
On peut donc en déduire que dans ces condition la population de loup va continuer à progresser.

4. A l'aide d'un tableau et de la calculatrice, nous pouvons déterminer le nombre de loups après 2023 en utilisant le même mode de croissance annuelle mais avec un prélèvement annuel de 35.

Année	2023	2024	2025	2026	2027	2028	2029	2030
n'	0	1	2	3	4	5	6	7
Population $w_{n'}$	446	$464,52$	$\approx 485,26$	$\approx 508,49$	$\approx 534,51$	$\approx 563,65$	$\approx 596,29$	$\approx 632,84$

Donc en 2030 le nombre de loups aura dépassé les 600 animaux.

Par le calcul (en s'inspirant du modèle précédent) :
Pour tout entier n, on définit par (w_n) le nombre de loups pour l'année $2023 + n'$. D'après l'énoncé (et en utilisant les questions précédentes), $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = 1,12 \times w_n - 35$ et $w_0 = 446$.
Soit (a_n) la suite géométrique de raison $1,12$, définie par $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_n = w_n - q$. Cherchons q.

$\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = w_{n+1} - q = 1,12 \times w_n - 35 - q = 1,12 \times \left(w_n - \dfrac{q+35}{1,12}\right)$.

De plus $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = 1,12 \times a_n = 1,12 \times (w_n - q)$ donc par identification, $\dfrac{q+35}{1,12} = q$

soit $q + 35 = 1,12q \iff q = \dfrac{35}{0,12} \approx 291,67$.

Donc Nous pouvons déterminer les expression de a_n et w_n en fonction de n :

- $a_0 = w_0 - 291,67 = 154,33$
- $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = a_0 \times 1,12^n = 154,33 \times 1,12^n$
- $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = a_n + q = 154,33 \times 1,12^n + 291,67$.

Il ne reste plus qu'à résoudre l'inéquation : $154,33 \times 1,12^n + 291,67 \geqslant 600$.

$154,33 \times 1,12^n + 291,67 \geqslant 600 \iff 1,12^n \geqslant \dfrac{600 - 291,67}{154,33} \iff \ln(1,12^n) \geqslant \ln(1,998)$

$n \times \ln(1,12) \geqslant \ln(1,998) \iff n \geqslant \dfrac{\ln(1,998)}{\ln(1,12)} \iff n \geqslant 7$ car $\dfrac{\ln(1,998)}{\ln(1,12)} \approx 6,107$

On retrouve le résultat vu dans le tableau : selon ce nouveau modèle de croissance, le nombre de loups aura dépassé les 600 animaux en 2030

Exercice 2. *(6 points)* Les Questions sont indépendantes :

1. Calculer la somme suivante, sachant que les termes de cette somme sont les termes d'une suite arithmétique.

$$S = -73 - 70 - ... + 17 = \frac{-73+17}{2} \times \underbrace{\left(\frac{17-(-73)}{3} + 1\right)}_{nb\ de\ termes} = -868$$

2. On considère une suite arithmétique telle que $v_8 = 20$ et $v_{12} = 28$. Alors la raison est : $r = \dfrac{28-20}{12-8} = 4$.

3. Déterminer $\left(\frac{3}{4}\right)^3 + \left(\frac{3}{4}\right)^4 + ... + \left(\frac{3}{4}\right)^{10} = \left(\frac{3}{4}\right)^3 \dfrac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{(10-3+1)}}{1 - \frac{3}{4}} \simeq 2,67$ à 10^{-2} *près*.

4. On considère la suite (S_n) définie par $S_n = 0,8 + 0,8^2 + ... + 0,8^n$ pour tout entier naturel n non nul. L'expression de S_n en fonction de n est $S_n = 0,8 \times \dfrac{1-0,8^n}{1-0,8}$.

   (a) Calculer $S_4 = 0,8 \times \dfrac{1-0,8^4}{1-0,8} \simeq 2,36$ à 10^{-2} *près* .

   (b) Déterminer les valeurs de a et b de sorte que : $S_n = a + b \times 0,8^n$. On a $a = 4$ et $b = -4$, voir ci-dessous :

$$S_n = 0,8 \times \frac{1-0,8^n}{1-0,8} = \frac{0,8 - 0,8 \times 0,8^n}{0,2} = \frac{0,8}{0,2} - \frac{0,8}{0,2} \times 0,8^n = 4 - 4 \times 0,8^n$$

   (c) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.
   On a $0 < 0,8 < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,8^n = 0$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} -4 \times 0,8^n = 0$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 4 - 4 \times 0,8^n = 4$.