DS 2 : polynôme du second degré

Consignes :

- Durée 1h.
- Calculatrice autorisée.
- Justifiez vos réponses.

Exercice 1. Résoudre les inégalités suivantes :

1. $\frac{-x^2+3x+4}{x^2+3x-4} \geqslant 0$. On commence par déterminer les signes du numérateur et du dénominateur pour faire le tableau de signes.

   - Pour $-x^2+3x+4$. On a $\Delta = 25 > 0$ donc $x_1 = \dfrac{-3+5}{-2} = -1$ et $x_2 = \dfrac{-3-5}{-2} = 4$.
   - Pour x^2+3x-4. On a $\Delta = 25 > 0$ donc $x_1 = \dfrac{-3+5}{2} = 1$ et $x_2 = \dfrac{-3-5}{2} = -4$.

   On obtient le tableau de signes suivant en utilisant le fait que lorsque qu'un polynôme du second degré à deux racines distinct, il est du signe du coefficient a à l'extérieur des racines :

x	$-\infty$		-4		-1		1		4		$+\infty$
$-x^2+3x+4$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
x^2+3x-4		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{-x^2+3x+4}{x^2+3x-4}$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

   Donc l'ensemble solution est $S =]-4;-1] \cup]1;4]$.

2. $\frac{2x^2-5}{x-2} \geqslant 3 \Leftrightarrow \frac{2x^2-5}{x-2} - 3 \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2-3x+1}{x-2} \geqslant 0$.

   - Pour $2x^2-3x+1$. On a $x_1 = \dfrac{1}{2}$ et $x_2 = 1$.

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		1		2		$+\infty$
$2x^2-3x+1$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{2x^2-3x+1}{x-2}$		$-$	0	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

   Donc l'ensemble solution est $S = \left[\frac{1}{2};1\right] \cup]2;+\infty]$

Exercice 2. On considère le polynôme $P(x) = 2x^3 - 17x^2 + 38x - 15$.

1. Déterminer a,b et c tel $P(x) = (x-3)(ax^2+bx+c) = ax^3 + (b-3a)x^2 + (c-3b)x - 3c$.
   D'où le système :

$$\left\{\begin{array}{c} a = 2 \\ b - 3a = -17 \\ c - 3b = 38 \\ -3c = -15 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} a = 2 \\ b = -11 \\ c = 5 \end{array}\right.$$

2. En déduire les racines du polynôme P.

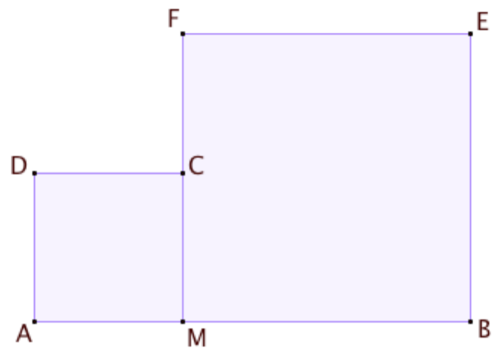
$$P(x) = 0 \Leftrightarrow (x-3)(2x^2-11x+5) = 0 \Leftrightarrow (x-3) = 0 \; ou \; (2x^2-11x+5) = 0$$

   Pour $2x^2-11x+5$ on a $\Delta = 81 = 9^2$ donc $x_1 = \frac{11-9}{4} = \frac{1}{2}$ et $x_2 = \frac{11+9}{4} = 5$

3. Déterminer le signe du polynôme P.

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		3		5		$+\infty$
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$2x^2-11x+5$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Exercice 3. Sur un segment [AB] de longueur 10, on place un point M. On construit deux carrés AMCD et MBEF.



On pose $x = AM$.

1. On a $x \in [0; 10]$.
2. Déterminer $A(x)$ la somme des aires des carrés AMCD et MBEF en fonction de x.
   $A(x) = AM^2 + MB^2 = x^2 + (10 - x)^2 = 2x^2 - 20x + 100$.
3. En déduire la position du point M pour que la somme des aires des deux carrés soit minimale.
   $A(x)$ est un polynôme du second degré qui est minimal pour $x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{20}{4} = 5$ résultat prévisible.
4. Déterminer x pour que l'aire $A(x)$ soit 58. Puis résoudre $A(x) \leqslant 58$.
   $A(x) \leqslant 58 \Leftrightarrow 2x^2 - 20x + 42 \leqslant 0$.
   On a $\Delta = 400 - 336 = 64 > 0$. On a donc deux racines qui sont $x_1 = \frac{20-\sqrt{64}}{4} = 3$ et $x_2 = \frac{20+\sqrt{64}}{4} = 7$.
   En utilisant le fait que $2x^2 - 20x + 42$ est du signe de $a = 2$ (coefficient de xx^2) à l'extérieur des racines, on obtient le tableau de signe :

x	0		3		7		10
$2x^2 - 20x + 42$		+	0	−	0	+	

Donc l'aire est égale à 58 en 3 et 7, cette aire est inférieur à 58 si $x \in [3; 7]$

Exercice 4. On considère les points de coordonnées $A(1; 2)$, $B(6; 3)$ et $C(-4; 1)$.
Déterminer si les points A, B et C sont alignés et déterminer une équation cartésienne de la droite (AB).

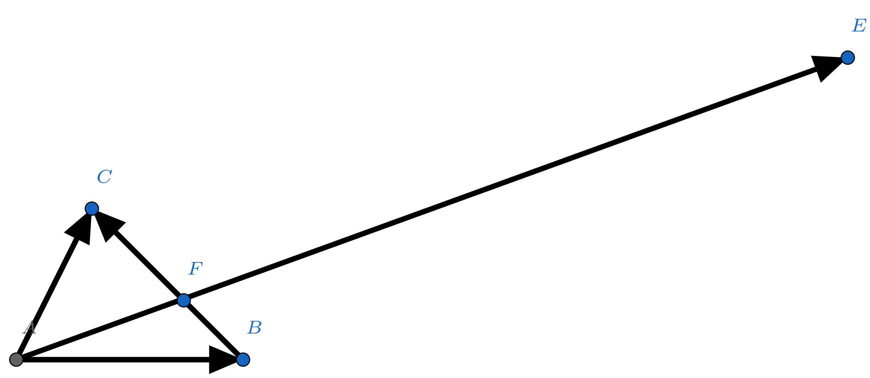
A,B et C sont alignés $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AC}$ *sont colinéaires* $\Leftrightarrow det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \begin{vmatrix} (6-1) & (-4-1) \\ (3-2) & (1-2) \end{vmatrix} = 5 \times (-1) - 1 \times (-5) = 0$

$M \in (AB) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ *et* $\overrightarrow{AB}$ *colinéaires* $\Leftrightarrow det(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{AB}) = \begin{vmatrix} (x-1) & (6-1) \\ (y-2) & (3-2) \end{vmatrix} = x - 1 - 5(y-2) = x - 5y + 9 = 0$.

Une équation cartésienne de (AB) est donc $x - 5y + 9 = 0$.

Exercice 5. On considère un triangle ABC.

1. Construire sur une figure un triangle ABC et les points E et F tel que : $\overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BF} = \frac{2}{5}\overrightarrow{BC}$.



2. Montrer que $\overrightarrow{AE} = 5\overrightarrow{AF}$. Que peut-on en déduire ?
$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AB} + \dfrac{2}{5}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \dfrac{2}{5}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$.
Donc $5\overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AE}$.
Donc les vecteurs $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont colinéaires et donc les points A, E et F sont alignés.
3. (Bonus) On se place dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$.

(a) Déterminer les coordonnées du points F. De l'égalité vectorielle $\overrightarrow{BF} = \dfrac{2}{5}\overrightarrow{BC}$ on déduit :

$$\begin{pmatrix} x_F - x_B \\ y_F - y_B \end{pmatrix} = \frac{2}{5}\begin{pmatrix} x_C - x_B \\ y_C - y_B \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_F - 1 \\ y_F - 0 \end{pmatrix} = \frac{2}{5}\begin{pmatrix} 0-1 \\ 1-0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_F = \frac{-2}{5} + 1 = \frac{3}{5} \\ y_F = \frac{2}{5} \end{cases}$$

(b) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AF}$.
D'après la question précédente $\overrightarrow{AF} : \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}$. Comme $\overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$, on a $\overrightarrow{AE} : \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Donc $\overrightarrow{AE} = 5\overrightarrow{AF}$.

(c) En déduire que les points A, E et F sont alignés. Donc les vecteurs $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont colinéaires et donc les points A, E et F sont alignés.

(d) Déterminer l'équation de la droite (BF). $M \in (BF) \Leftrightarrow \overrightarrow{BM}\ et\ \overrightarrow{BC}\ colin\acute{e}aires \Leftrightarrow det(\overrightarrow{BM}; \overrightarrow{BC}) = \begin{vmatrix} (x-1) & (0-1) \\ (y) & (1-0) \end{vmatrix} =$ $x - 1 + y = x + y - 1 = 0$.
Une équation cartésienne de (BF) est donc $x + y - 1 = 0$.

Exercice 6. On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$, par :

$$f(x) = \frac{3x^2 - 8x - 48}{(x-5)}$$

1. Déterminer trois réels a,b et c tels que :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x-5}$$

$$ax + b + \frac{c}{x-5} = \frac{ax^2 + (b-5a)x + c - 5b}{x-5} = f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b - 5a = -8 \\ c - 5b = -48 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -8 + 5a = 7 \\ c = -48 + 5b = -13 \end{cases}$$

Donc $f(x) = 3x + 7 - \dfrac{13}{x-5}$

2. Déterminer le signe de $f(x) - (3x+7) = 3x + 7 - \dfrac{13}{x-5} - 3x - 7 = -\dfrac{13}{x-5}$.

x	$-\infty$		5		$+\infty$
-13		$-$		$-$	
$x-5$		$-$	0	$+$	
$f(x) - (3x+7)$		$+$	$\|$	$-$	

3. En déduire la position de la représentation graphique de f et relativement à la droite d'équation $y = 3x + 7$. Donc sur $]-\infty; 5[$ la représentation graphique de f est au dessus de à la droite d'équation $y = 3x + 7$ et sur $]5; +\infty[$ la représentation graphique de f est au dessous de à la droite d'équation $y = 3x + 7$