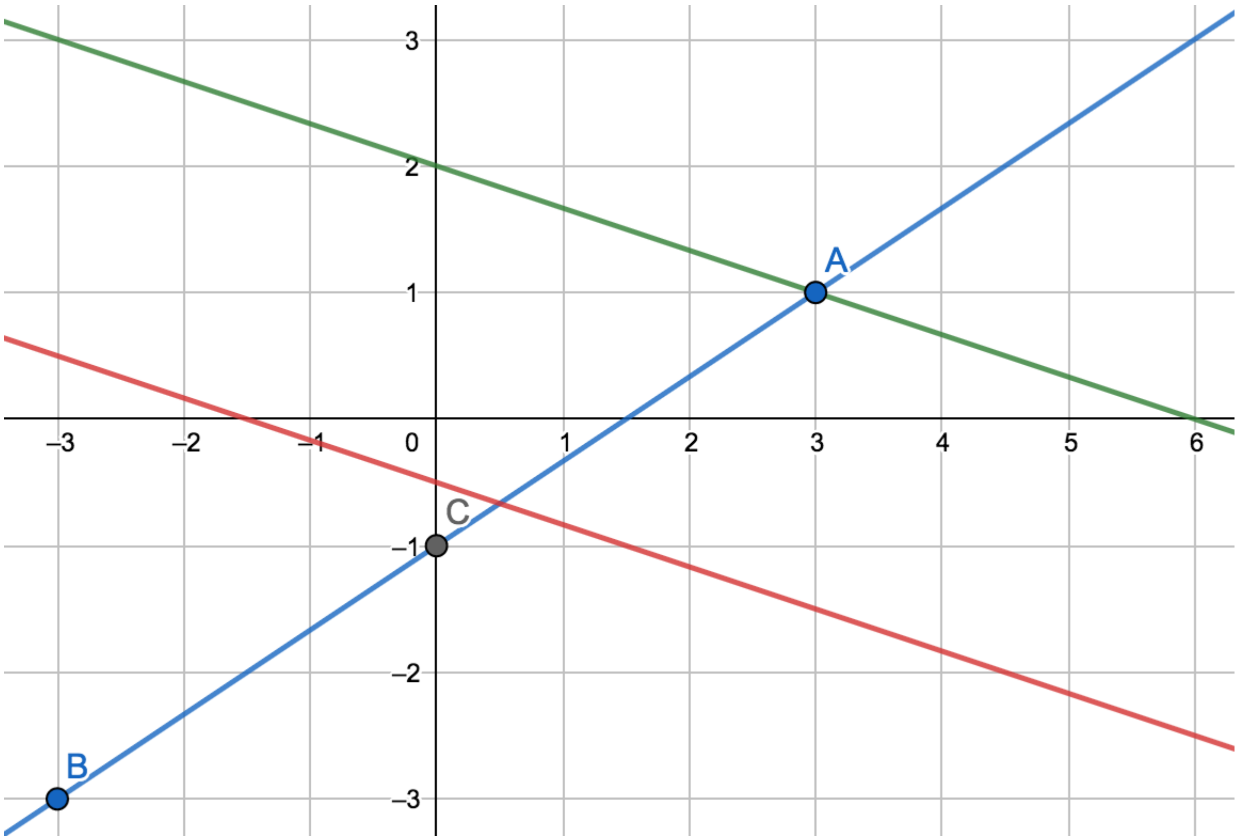
Correction du DS 3 de 1S1 du 5 novembre 2018.

Exercice 1. On se place dans un repère plan $\mathcal{P}$ repéré par $(O;\vec{i};\vec{j})$.



1. On considère le point $A(3,1)$ et $\vec{u}:\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$.
   Déterminer l'équation de la droite d passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.
   $M\in d \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ *et* $\vec{u}$ *sont colinéaires* $\Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{AM};\vec{u}\right)=\begin{vmatrix}x-3 & 3\\ y-1 & -1\end{vmatrix}=-(x-3)-3(y-1)=-x-3y+6=0$ Donc $d:-x-3y+6=0$.
2. On considère les points $B(-3;-3)$ et $C(0;-1)$. Déterminez une équation de la droite (BC).
   $M\in(BC)\Leftrightarrow \overrightarrow{BM}$ *et* $\overrightarrow{BC}$ *sont colinéaires* $\Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{BM};\overrightarrow{BC}\right)=\begin{vmatrix}x+3 & 3\\ y+3 & 2\end{vmatrix}=2(x+3)-3(y+3)=2x-3y-3=0$
   Donc $(BC):2x-3y-3=0$.
3. Déterminer l'intersection des droites d et (BC).
   Si $M(x,y)$ appartient à l'intersection de d et (BC) alors ces coordonnées vérifies :
   $\begin{cases}-x-3y+6=0\\ 2x-3y-3=0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{matrix}2L1+L2\\ L2-L1\end{matrix}\begin{cases}-9y+9=0\\ 3x-9=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\ y=1\end{cases}$
   Donc $d\cap(BC)=\{A\}$.
4. Déterminer un point et vecteur directeur de la droite Δ d'équation : $2x+6y+3=0$.
   Avec $x=0$, on obtient $y=\frac{-3}{6}=\frac{-1}{2}$. Donc le point de coordonnées $\left(0,\frac{-1}{2}\right)$ est un point de Δ. Le vecteur $\vec{v}:\begin{pmatrix}-6\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de Δ.
5. Déterminer les positions relatives des droites d, (BC) et Δ. (Sécantes, parallèles ou confondues)
   On a $\vec{v}=-2\vec{u}$. Donc les vecteurs directeurs de d et Δ sont colinéaires. Donc $d//\Delta$. Or à la question 3. On a montré que d et (BC) étaient sécantes. Donc Δ et (BC) sont sécantes (puisque $d//\Delta$).
6. Les points A, B et C sont-ils alignés ?
   A est l'intersection de (BC) et d donc A, B et C sont alignés.

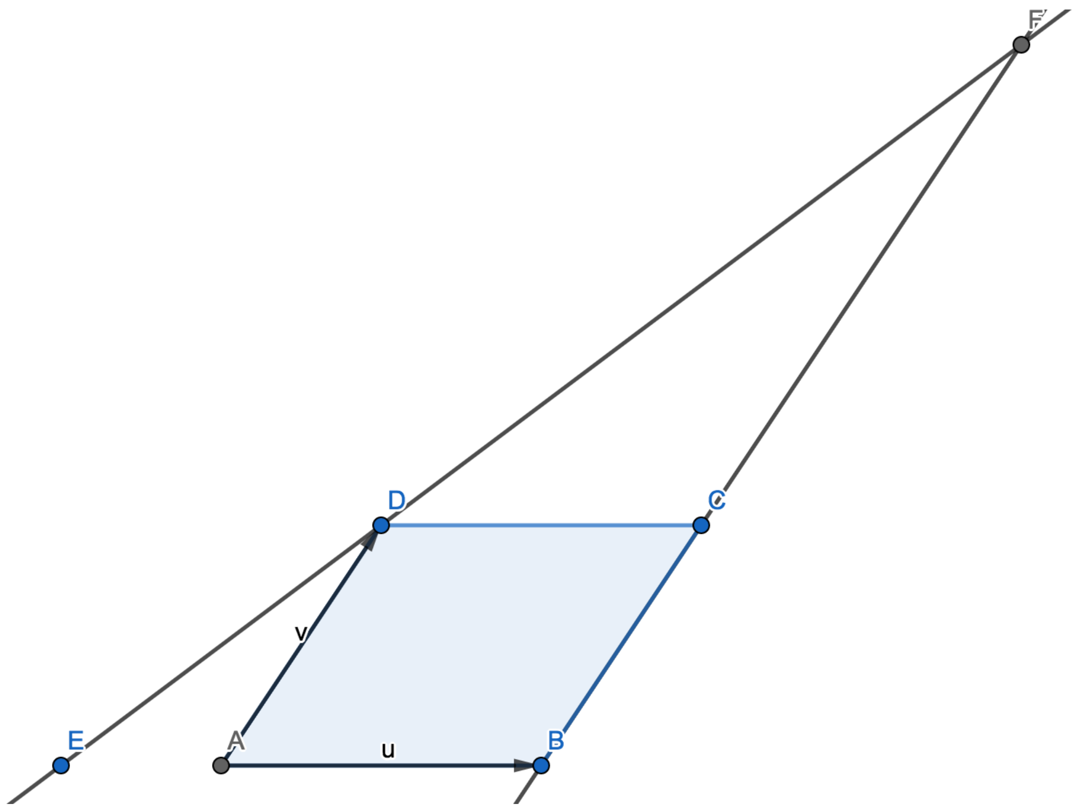
Exercice 2. Soit m un nombre réel. On considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} m-1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 3 \\ m-2 \end{pmatrix}$.
Déterminer les valeurs de m pour que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires.
$\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *soit colinéaires* $\Leftrightarrow \det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} m-1 & 3 \\ 2 & m-2 \end{vmatrix} = (m-1)(m-2) - 6 = m^2 - 3m - 4 = 0.$
On cherche les racines du polynôme : $\Delta = (-3)^2 - 4 \times (-4) = 25 > 0$. On a deux racines : $x_1 = \dfrac{3-5}{2 \times 1} = -1$ et $x_1 = \dfrac{3+5}{2 \times 1} = 4$. Donc :

$$\vec{u} \textit{ et } \vec{v} \textit{ soit colinéaires} \Leftrightarrow m = -1 \textit{ ou } m = 5$$

Exercice 3. Soit $ABCD$ un parallélogramme. On note E et F les points vérifiant les égalités vectorielles suivantes :

$$\overrightarrow{BE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BA} \qquad et \qquad \overrightarrow{BF} = 3\overrightarrow{BC}$$

On se place dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$



1. Déterminer les coordonnées des points E et F dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$.

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{BA} = \frac{-1}{2}\overrightarrow{AB}$$

   Donc $E\left(\frac{-1}{2}, 0\right)$.
   Comme $ABCD$ parallélogramme, on a $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$, donc :

$$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + 3\left(\overrightarrow{BA} + \underbrace{\overrightarrow{AC}}_{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}}\right) = \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AD}$$

   Donc $F(1;3)$.
2. Montrer que $\overrightarrow{EF} = 3\overrightarrow{ED}$.
   $\overrightarrow{EF} : \begin{pmatrix} x_F - x_E \\ y_F - x_E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{-1}{2} \\ 3 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{ED} : \begin{pmatrix} 0 - \frac{-1}{2} \\ 1 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$. Donc $\overrightarrow{EF} = 3\overrightarrow{ED}$.
3. Montrer que les points E, D et F sont alignés.
   Puisque $\overrightarrow{EF} = 3\overrightarrow{ED}$, les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $3\overrightarrow{ED}$ sont colinéaires et donc les points E, D et F sont alignés.

Exercice 4. On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{-6}{\sqrt{x^2+4}} + 5$.

1. Recopier et finir de compléter le tableau ci-dessous :

x	0	$+\infty$
$x \mapsto x^2$	0 $\nearrow$	$+\infty$
$x \mapsto x+4$	4 $\nearrow$	$+\infty$
$x \mapsto \sqrt{x}$	2 $\nearrow$	$+\infty$
$x \mapsto \frac{1}{x}$	$\frac{1}{2}$ $\searrow$	0
$x \mapsto -6x+5$	2 $\nearrow$	5

Justification :

Car la fonction carré est croissante sur $[0; +\infty[$

L'opération $u + k$ ne modifie pas les variations de la fonction.

La fonction $\sqrt{u}$ à les mêmes variation que u.

La fonction inverse, inverse les variations de u (Remarque : ici on est à valeur dans $[2; +\infty[$ intervalle sur lequel la fonction inverse est bien définie)

La fonction affine $x \mapsto -6x + 5$ est décroissante donc les variations sont inversées.

x	$-\infty$	0
$x \mapsto x^2$	$+\infty$ $\searrow$	0
$x \mapsto x+4$	$+\infty$ $\searrow$	4
$x \mapsto \sqrt{x}$	$+\infty$ $\searrow$	2
$x \mapsto \frac{1}{x}$	0 $\nearrow$	$\frac{1}{2}$
$x \mapsto -6x+5$	5 $\searrow$	2

Justification :

Car la fonction carré est décroissante sur $[-\infty, 0[$

L'opération $u + k$ ne modifie pas les variations de la fonction.

La fonction $\sqrt{u}$ à les mêmes variation que u.

La fonction inverse, inverse les variations de u (Remarque : ici on est à valeur dans $[2; +\infty[$ intervalle sur lequel la fonction inverse est bien définie)

La fonction affine $x \mapsto -6x + 5$ est décroissante donc les variations sont inversées.

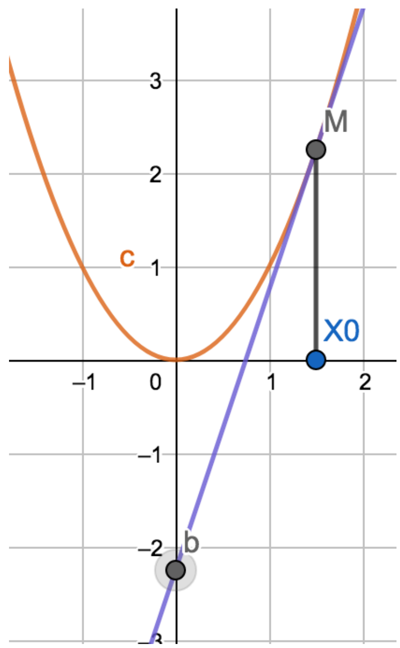
2. Comparer en justifiant et sans les calculer :
   - $f(3)$ et $f(5)$. Comme sur $[0, +\infty[$ la fonction f est croissante : $3 \leqslant 5 \Rightarrow f(3) \leqslant f(5)$.
   - $f(-3) et f(-5)$. Comme sur $[-\infty, 0[$ la fonction f est décroissante : $-5 \leqslant -3 \Rightarrow f(-5) \geqslant f(-3)$.
   - $f(a)$ et $f(b)$ avec $a \leqslant b \leqslant 0$.
     Comme sur $[-\infty, 0[$ la fonction f est décroissante : $a \leqslant b \leqslant 0 \Rightarrow f(a) \geqslant f(a) \geqslant f(0) = 2$.

Exercice 5. On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x^3 + 3x^2 + 3$. Soit a et b deux réels.

1. Montrer que $h(b) - h(a) = (b-a)(a^2 + ab + b^2 + 3a + 3b)$.
   On a : $h(b) - h(a) = (b^3 + 3b^2 + 3) - (a^3 + 3a^2 + 3) = b^3 - 3b^2 - a^3 + 3a^2$
   De plus : $(b-a)(a^2+ab+b^2+3a+3b) = ba^2+ab^2+b^3+3ab+3b^2-a^3-a^2b-ab^2-3a^2-3ab = b^3+3b^2-a^3-3a^2$.
   Donc $h(b) - h(a) = (b-a)(a^2 + ab + b^2 + 3a + 3b)$.
2. Montrer que si $0 \leqslant a \leqslant b$ alors $h(b) - h(a) \geqslant 0$.
   Comme $a \geqslant 0$ et $b \geqslant 0$ alors $(a^2 + ab + b^2 + 3a + 3b) \geqslant 0$. Par ailleurs $b \geqslant a$ donc $b - a \geqslant 0$.

3. En déduire les variations de h sur $[0, +\infty[$.
   Donc h est croissante. Puisque :
   si $0 \leqslant a \leqslant b \Rightarrow h(b) - h(a) \geqslant 0 \Rightarrow h(b) \geqslant h(a)$.

Exercice 6. On note P la parabole représentation graphique de la fonction carré (c'est-à-dire d'équation $y = x^2$) et $A(1;1)$ un point de P.
On note d une droite du plan et $y = ax + b$ son équation réduite.



1. Étude d'un cas particulier :
   (a) Montrer que pour que d passe par le point A il faut et il suffit que $b = 1 - a$.
   $A \in d \Leftrightarrow 1 = a \times 1 + b \Leftrightarrow b = 1 - a$
   (b) Montrer que pour que A soit le seul point d'intersection entre P et d, il faut et il suffit que $a = 2$. (Indication : $a^2 - 4a + 4 = (a-2)^2$).
   Pour rechercher les points d'intersection de d et P, on doit résoudre le système (comme $A \in d \Leftrightarrow y = ax + a - 1$) :
   $\begin{cases} y = x^2 \\ y = ax + 1 - a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = ax + 1 - a \\ y = ax + 1 - a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - ax - 1 + a = 0 \\ y = ax + 1 - a \end{cases}$
   Pour que seul A soit solution du système précédent, il faut que la première équation (qui est un polynôme du second degré) n'est qu'une solution. Donc il faut $\Delta = 0$:
   $$\Delta = 0 \Leftrightarrow (-a)^2 - 4 \times 1 \times (-1 + a) = 0 \Leftrightarrow a^2 - 4a + 4 = (a-2)^2 = 0 \Leftrightarrow a = 2$$
   Donc $d \cap P = \{A\} \Leftrightarrow a = 2$.
   (c) En déduire alors l'équation de d.
   Si $a = 2$ alors $b = 1 - a = -1$ et $d : y = 2x - 1$.
2. Étude du cas général. On note $M(x_0, x_0^2)$ un point quelconque de P.
   (a) Montrer que d passe par M si et seulement si $b = x_0^2 - ax_0$. $M \in d \Leftrightarrow x_0^2 = a \times x_0 + b \Leftrightarrow b = x_0^2 - ax_0$
   (b) Montrer que M est l'unique point d'intersection de d et P si et seulement si $a = 2x_0$. (Indication : $a^2 - 4ax_0 + 4x_0^2 = (a - 2x_0)^2$).
   Pour rechercher les points d'intersection de d et P, on doit résoudre le système (comme $M \in d \Leftrightarrow y = ax + ax_0^2 - x_0^2$) :
   $\begin{cases} y = x^2 \\ y = ax + x_0^2 - ax_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = ax + x_0^2 - ax_0 \\ y = ax + 1 - a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - ax - x_0^2 + ax_0 = 0 \\ y = ax + 1 - a \end{cases}$
   Pour que seul M soit solution du système précédent, il faut que la première équation (qui est un polynôme du second degré) n'est qu'une solution. Donc il faut $\Delta = 0$:
   $$\Delta = 0 \Leftrightarrow (-a)^2 - 4 \times 1 \times (-x_0^2 + ax_0) = 0 \Leftrightarrow a^2 - 4x_0 a + 4x_0^2 = (a - 2x_0)^2 = 0 \Leftrightarrow a = 2x_0$$
   Donc $d \cap P = \{M\} \Leftrightarrow a = 2x_0$.
   (c) En déduire alors l'équation de d. Si $a = 2x_0$ alors $b = x_0^2 - ax_0 = x_0^2 - 2x_0^2 = -x_0^2$ et $d : y = 2x_0 \times x - x_0^2$.