DS du vendredi 19 octobre 2018 : Suites numériques et fonction exponentielle.

Consignes :

- Durée 1h.
- Calculatrice autorisée.
- Justifiez vos réponses.

Exercice 1. Dans cet exercice, si nécessaire, les valeurs numériques approchées seront données à 0, 01 près.
On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 4]$ par :

$$f(x) = (3,6x + 2,4)e^{-0,6x} - 1,4$$

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0; 4]$ et on note f' sa fonction dérivée.

1. Justifier que pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0; 4]$ on a :

$$f'(x) = 3,6e^{-0,6x} + (3,6x + 2,4) \times (-0,6)e^{-0,6x} = (3,6 - 2,16x - 1,44)e^{-0,6x} = (-2,16x + 2,16)e^{-0,6x}$$

2. (a) Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0\,;\,4]$. Pour tout x, $e^{-0,6x} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $-2,16x + 2,16$ sur $[0\ ;\ 4]$:
   - $f'(x) > 0$ pour $x \in [0\ ;\ 1[$;
   - $f'(1) = 0$;
   - $f'(x) < 0$ pour $x \in]1\ ;\ 4]$.

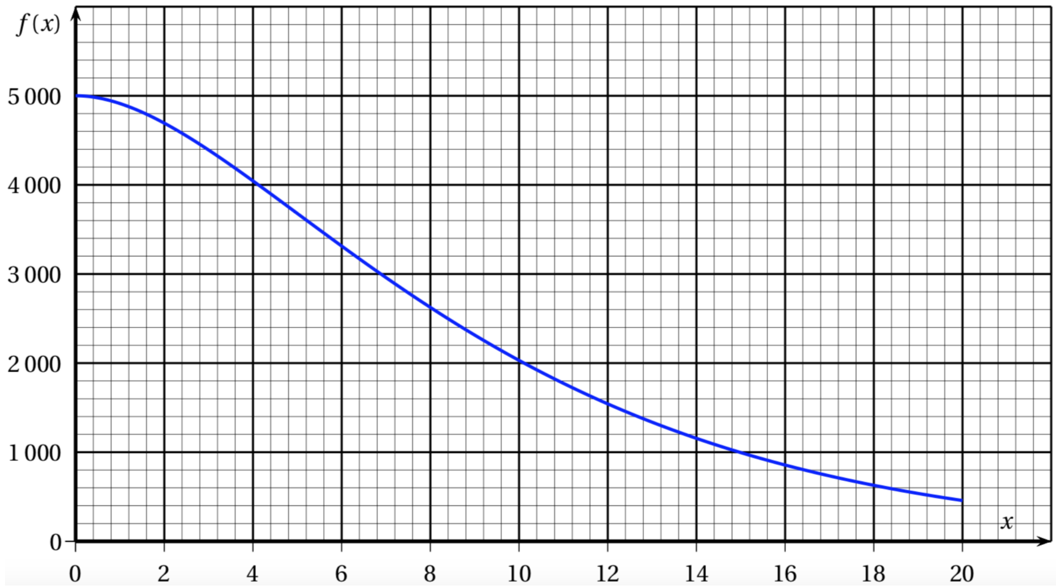
   (b) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur cet intervalle.
   On donnera les valeurs numériques qui apparaissent dans le tableau de variation sous forme approchée.
   $f(0) = 2,4e^0 - 1,4 = 1$, $f(1) = 6e^{-0,6} - 1,4 \approx 1,89$ et $f(4) = 16,8e^{-2,4} - 1,4 \approx 0,12$
   On dresse le tableau de variations de la fonction f :

x	0	1	4
$f(x)$	1	↗ 1.89 ↘	0.12

Exercice 2. On considère la fonction dérivable f définie sur $I = [0; 20]$ par :

$$f(x) = 1000(x + 5)e^{-0,2x}.$$

Partie A - Étude graphique
On a représenté sur le graphique ci-dessous, la courbe représentative de la fonction f .



Répondre aux questions suivantes par lecture graphique.

1. Résoudre graphiquement et de façon approchée l'équation $f(x) = 3000$.
   Graphiquement la solution semble environ $x \simeq 6,8$
2. (Bonus) On dit que la surface sous la courbe entre les abscisses 0 et 2 est environ $2 \times 5000 = 10000$ (résultat très approximatif). Ce résultat peut être obtenue aussi en comptant le nombre de "carré" entre les abscisse 0 et 2 est la courbe , ici "5" et comme chaque carré à une surface de "2000", on obtient $5 \times 2000 = 10000$ de surface. Déterminer une valeur très approximative de la surface sous la courbe entre les abscisses 0 et 20.
   Il y a environ 23 "carrés" de surface 2000 unités. Donc le surface sous la courbe est d'environ 46000 unités.

Partie B - Étude théorique

1. On note f' la dérivée de la fonction f sur $[0;20]$.
   Démontrer que pour tout x de $[0;20]$, $f'(x) = -200xe^{-0,2x}$.

   $f'(x) = 1000 \times e^{-0,2x} + (1000x+5000) \times (-0,2e^{-0,2x}) = (1000 - 0,2(1000x+5000)) \times e^{-0,2x} = -200xe^{-0,2x}$
2. En déduire le sens de variation de f et dresser son tableau des variations sur l'intervalle $[0;20]$.
   Si nécessaire, arrondir à l'unité les valeurs présentes dans le tableau.
   On a $e^{-0,2} > 0$. De plus sur l'intervalle $[0;20]$, on a $x \geqslant 0$ donc $-200x \leqslant 0$. Donc $f'(x) = -200xe^{-0,2x} \leqslant 0$.
   Par ailleurs $f(0) = 5000$ et on notera $\beta = f(20) = 25000 \times e^{-4}$

x	0	α	20
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	5000	3000	β

3. Expliquez à l'aide du tableau précédent, que l'équation $f(x) = 3000$ admet une unique solution α sur $[0;20]$, puis donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près à l'aide de la calculatrice.
   Á l'aide du tableau de variation, puisque $3000 \in [\beta; 5000]$, on peut affirmer qu'il existe une unique solution de $f(x) = 3000$ et cette solution que l'on a noté α dans le tableau précédent vaut environ 6,88 à $10^{0,2}$ près.

Partie C - Étude économique

La fonction de demande d'un produit est modélisée sur l'intervalle $[0;20]$ par la fonction f étudiée dans les parties A et B. Le nombre $f(x)$ représente la quantité d'objets demandés lorsque le prix unitaire est égal à x euros. Utiliser les résultats de la partie B afin de répondre à la question :

En-dessous de quel prix unitaire, arrondi au centime,la demande est-elle supérieure à 3000 objets ?

A partie de la question précédente, la demande est supérieur à 3000 si le prix unitaire est inférieur à 6,88 €.

Exercice 3. Des algues prolifèrent dans un étang. Pour s'en débarrasser, le propriétaire installe un système de filtration. En journée, la masse d'algues augmente de 2 %, puis à la nuit tombée, le propriétaire actionne pendant une heure le système de filtration qui retire 100 kg d'algues. On admet que les algues ne prolifèrent pas la nuit. Le propriétaire estime que la masse d'algues dans l'étang au matin de l'installation du système de filtration est de 2 000 kg. On modélise par a_n la masse d'algues dans l'étang, exprimée en kg, après utilisation du système de filtration pendant n jours ; ainsi, $a_0 = 2000$. On admet que cette modélisation demeure valable tant que a_n reste positif.

1. Vérifier par le calcul que la masse a_2 d'algues après deux jours de fonctionnement du système de filtration est de 1 878,8 kg.
   Pour déterminer la masse le jour suivant, on augmente la masse du jour précédent de 2% (c'est à dire que la multiplie par $(1 + 0,02) = 1,02$) puis du fait du traitement on enlève 100 kg : $a_1 = 1,02 \times a_0 - 100 = 1,02 \times 2000 - 100 = 1940$
   $a_2 = 1,02 \times a_1 - 100 = 1,02 \times 1940 - 100 = 1878,8.$
   Donc la masse a_2 d'algues après deux jours de fonctionnement du système de filtration est de 1 878,8 kg.
2. On affirme que pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 1,02a_n - 100$.
   (a) Justifier à l'aide de l'énoncé la relation précédente. Pour déterminer la masse le jour suivant, on augmente la masse du jour précédent u_n de 2% (c'est à dire que la multiplie par $(1 + 0,02) = 1,02$) puis du fait du traitement on enlève 100 kg : $a_{n+1} = 1,02 \times a_n - 100$.
   (b) On considère la suite (b_n) définie pour tout nombre entier n par :
   $$b_n = a_n - 5000$$
   Démontrer que la suite (b_n) est géométrique. Préciser son premier terme b_0 et sa raison.
   - On $b_n = a_n - 5000$ donc $a_n = b_n + 5000$
   - De plus :
   $$b_{n+1} = a_{n+1} - 5000 = 1,02 \times a_n - 100 - 5000 = 1,02 \times (b_n + 5000) - 5100 = 1,02b_n + 5100 = 5100 = 1,02b_n$$
   Donc la suite b_n est géométrique de raison $1,02$ et de premier terme $b_0 = a_0 - 5000 = -3000$.
   (c) En déduire pour tout entier naturel n, une expression de b_n en fonction de n, puis montrer que $a_n = 5000 - 3000 \times 1,02^n$.
   Donc l'expression de b_n en fonction de n est $b_n = 1,02^n \times b_0 = -3000 \times 1,02^n$.
   Donc $a_n = b_n + 5000 = 5000 - 3000 \times 1,02^n$.
   (d) En déterminant la limite de la suite a_n, justifier que les algues finissent par disparaitre.
   Comme $1,02 > 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} 1,02^n = +\infty$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} -3000 \times 1,02^n = -\infty$.
   Et enfin $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 5000 - 3000 \times 1,02^n = -\infty$.
   On en déduit donc que la population d'algues va finir par disparaitre (puisque a_n finie par s'annuler, ensuite la forme ne fonctionnement plus bien sûr pour $a_n < 0$)
3. (a) Recopier et compléter l'algorithme suivant pour qu'il détermine au bout de combien de jours les algues disparaissent :

$N \leftarrow 0$
$A \leftarrow 2000$
Tant que $A > 0$ faire
    $A \leftarrow 1,02 \times A - 100$
    $N \leftarrow N + 1$
Fin Tant que
Afficher N

(b) Quel est le résultat renvoyé par l'algorithme ? Et que peut-on en déduire sur l'évolution de la population d'algues ?

Jour (n)	0	1	....	25	26
Population a_n	0	1	...	78,18	-20,25

Le résultat que renvoie l'algorithme est 26. C'est-à-dire que la population d'algue s'annulera et donc disparaitra au bout de 26 jours.