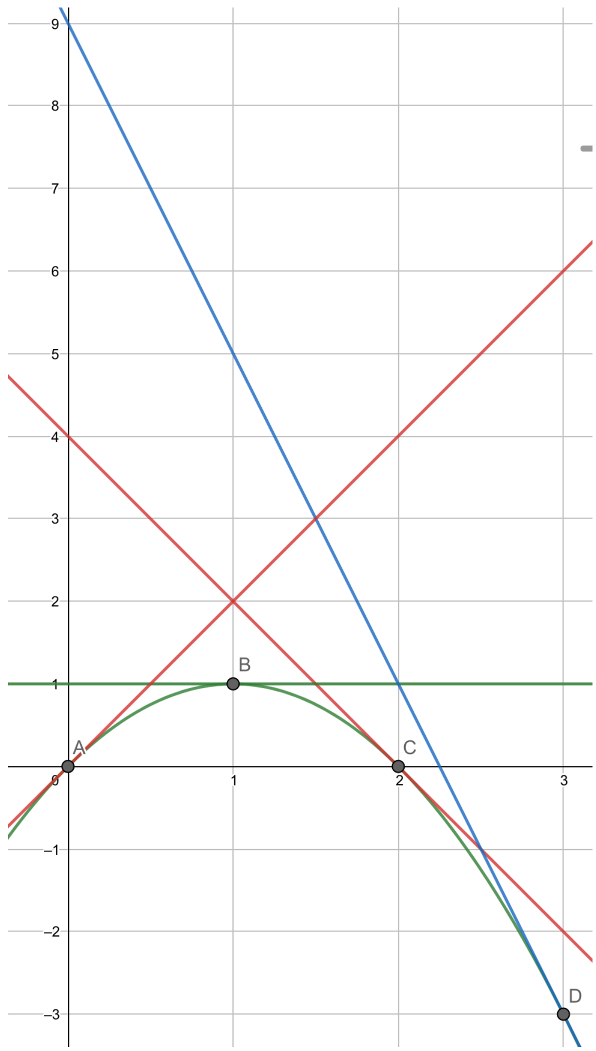
DS 4 de 1S1 du 17 décembre 2018.

Consignes :

- Durée 1h30.
- Calculatrice autorisée.
- Justifiez vos réponses.

Exercice 1. Ci-dessous, nous avons la représentation de la fonction p et les tangente à sa courbe représentative aux points A, B, C et D d'abscisses respectifs 0, 1, 2 et 3.



La valeur de la dérivée en un point correspond au coefficient directeur de sa tangente en ce point, donc $p'(0) = 2$, $p'(1) = 0$ (tangente horizontale), $p'(2) = -2$ et enfin de $p'(3) = -4$.

Exercice 2. .

Partie A :

On considère la fonction définie sur $D =]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x-3}{x+1}$$

1. Déterminer l'expression de la dérivée $f'(x)$:

$$f(x) = \frac{1 \times (x+1) - (x-3) \times 1}{(x+1)^2} = \frac{4}{(x+1)^2}$$

2. Étudier le signe de $f'(x)$ et dresser la tableau de variation de f :
   Comme $(x-1)^2 > 0$ sur D on a $f'(x) > 0$ sur D.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\Vert$	$+$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$\Vert$	$\nearrow$	1

3. Déterminer l'équation de la tangente T_1 en 1.
   On utilise la formule de la tangente en a :

$$T_1 : y = f'(1)(x-1) + f(1) = 1(x-1) - 1 = x - 2$$

4. Montrer que :

$$f(x) - (x-2) = \frac{x-3}{x+1} - \frac{(x-2)(x+1)}{(x+1)} = \frac{x-3-x^2+x+2}{x+1} = \frac{-x^2+2x-1}{x+1} = \frac{-(x-1)^2}{x+1}$$

5. En déduire la position les positions relative de $\mathcal{C}_f$ et T_1.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$-(x-1)$		$-$		$-$	0	$-$	
$x+1$		$-$	0	$+$	0	$+$	
$\dfrac{-(x-1)^2}{x+1}$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$-$	
Position		$\mathcal{C}_f/T_1$	$\Vert$	$T_1/\mathcal{C}_f$		$T_1/\mathcal{C}_f$	

Partie B :

On définie la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

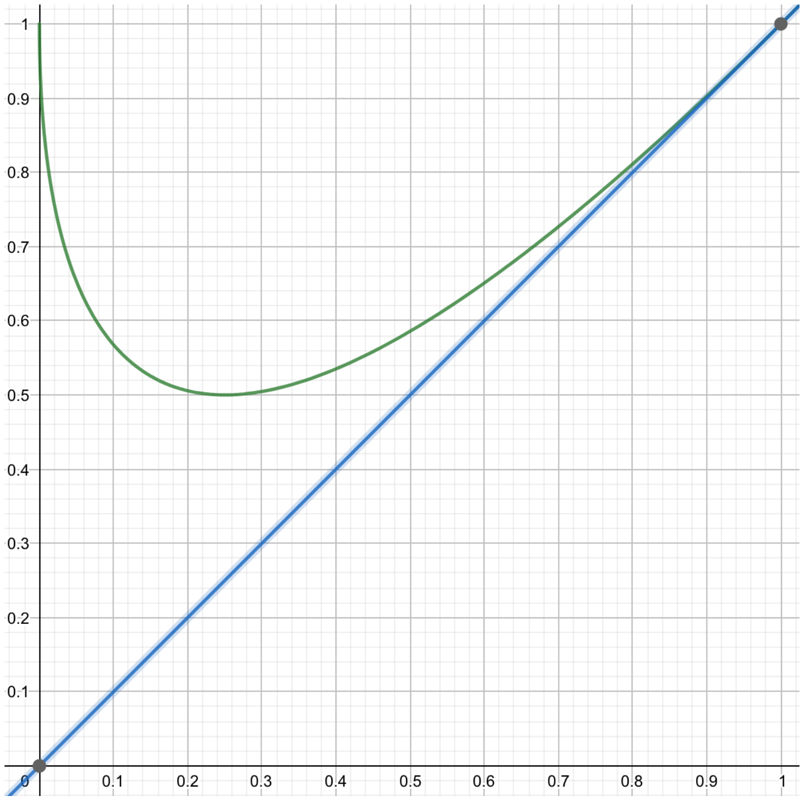
$$u_n = \frac{n-3}{n+1} = f(n)$$

Déterminer les variations de (u_n).
Au vu du tableau de la partie A, (u_n) est croissante.

Exercice 3. . On définie la fonction g sur $\mathbb{R}^+$ par l'expression :

$$g(x) = 2x - \sqrt{x} + 1$$

Ci-dessous sont représenté $\mathcal{C}_g$ la représentation graphique de la fonction g et la droite d'équation $y = x$:



Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A.

1. Déterminer l'expression de :

$$g'(x) = 2 - \frac{2}{2\sqrt{x}} = 2 - \frac{1}{\sqrt{x}}$$

2. Décomposé g' en fonction de référence.

x	0	$+\infty$
$x \mapsto \sqrt{x}$	0 ↗	$+\infty$
$x \mapsto \frac{1}{x}$	$+\infty$ ↘	0
$x \mapsto 2 - x$	$-\infty$ ↗	2

Justification :

Car la fonction racine est croissante sur $[0; +\infty[$

La fonction inverse, inverse les variations de u .

La fonction affine $ax + b$ inverse les variations si $a < 0$.

3. Montrer :

$$x \geqslant \frac{1}{4} \Leftrightarrow \sqrt{x} \geqslant \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} \geqslant 2 \Leftrightarrow 2 - \frac{1}{2\sqrt{x}} \geqslant 2 - 2 = 0 \Leftrightarrow g'(x) \geqslant 0$$

On aurait pu déterminer cette inégalité en utilisant les variation de g' trouvé à la question précédente.

4. En déduire le tableau de variation de g.

x	0		$\frac{1}{4}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	↘	0.5	↗	$+\infty$

En effet :

$$g\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

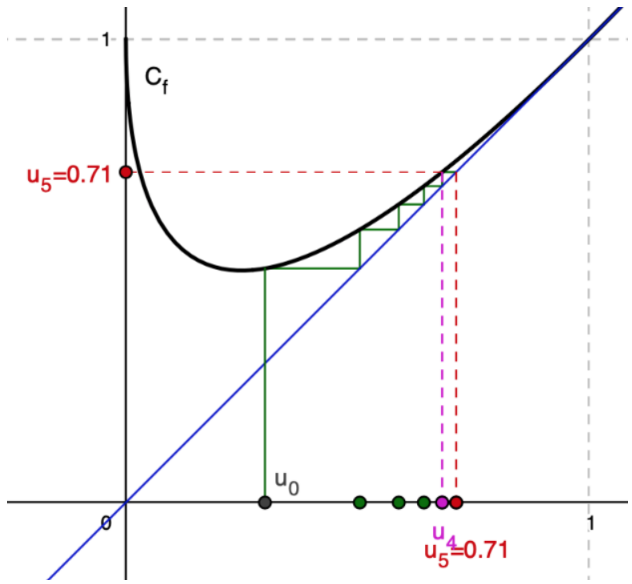
5. Montrer que la droite d'équation $y = x$ est tangente à $\mathcal{C}_g$ au point d'abscisse 1.
   Le point $(1,1)$ est sur la droite et $f(1) = 1$, par ailleurs le coefficient directeur est bien : $1 = f'(1)$.

Partie B.

On définie la suite (V_n) sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} V_0 = 0.3 \\ V_{n+1} = g(V_n) = 2V_n - \sqrt{V_n} + 1 \end{cases}$$

1. Conjecture :
   (a) Représentez les premiers termes de la suite sur le graphique ci-dessus, où sont représenté la fonction g et la droite d'équation $y = x$.



   (b) Recopier et compléter le tableau de valeurs ci-dessous :

n	0	1	2	3	4
V_n à 10^{-2}près	0,25	0,5	0,59	0,64	0,68

   (c) Quelles conjectures peut-on faire sur le comportement de la suite (V_n) ?
   On conjecture que la suite est croissante et tend vers 1.

2. Étude algébrique.
   (a) Montrer que :

$$V_{n+1} - V_n = 2V_n - 2\sqrt{V_n} + 1 - V_n = V_n - 2\sqrt{V_n} + 1 \qquad et \qquad \left(\sqrt{V_n} - 1\right)^2 = \sqrt{V_n}^2 - 2\sqrt{V_n} + 1 = V_n - \sqrt{V_n} + 1$$

   (b) En déduire le sens de variation de la suite (V_n).
   Comme :

$$V_{n+1} - V_n = \left(\sqrt{V_n} - 1\right)^2 \geqslant 0$$

   On peut en déduire que la suite (V_n) est croissante.

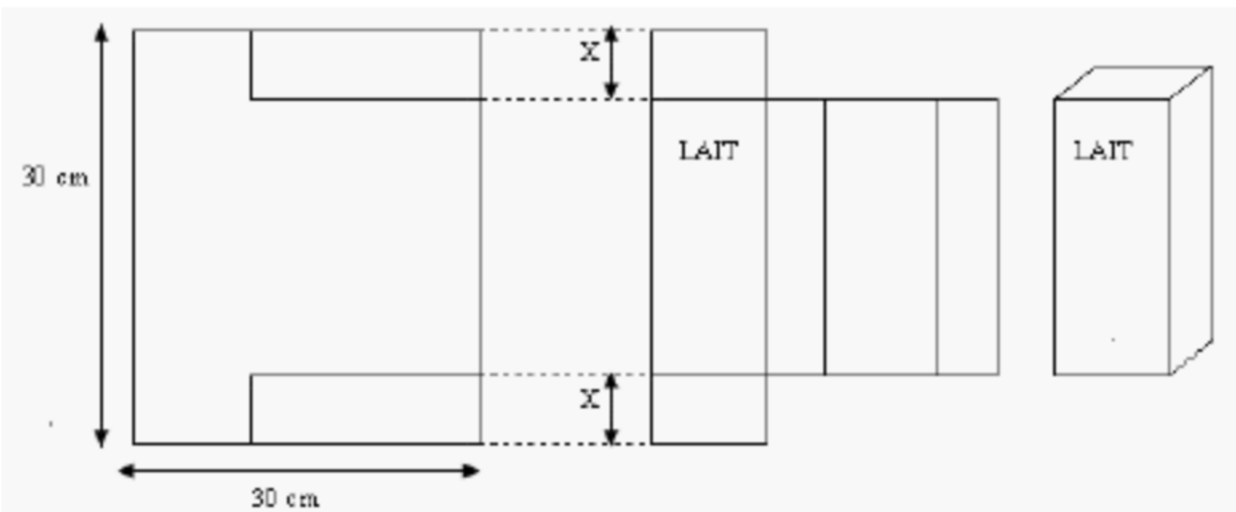
Exercice 4. Pour un forage, une entreprise propose le tarif suivant :

- Pour le déplacement, elle facture 80 €.
- Pour le premier mètre foré un tarif de 100 €.
- Puis 20 € de plus a chaque mètre suivant (c'est-à-dire le deuxième à 120 €, puis le suivant à 140 € et ainsi de suite)

On note W_n le prix du $W^{ième}$ mètre. On note $W_0 = 80$, puis $W_1 = 100$

1. Déterminer l'expression de W_{n+1} en fonction de W_n et déterminer la nature de la suite (W_n).
   On a :
   $$W_{n+1} = \underbrace{W_n}_{prix\ du\ n^{ième}\ mètre} + \underbrace{20}_{augmenté\ de\ 20€}$$
   La suite (W_n) est donc une suite arithmétique de raison 20 et de premier terme $W_0 = 80$
2. Déterminer l'expression de W_n en fonction de n.
   Donc :
   $$W_n = W_0 + n \times 20 = 80 + 20n$$
3. Déterminer le prix du $40^{ième}$ mètre.
   $$W_{40} = 80 + 20 \times 40 = 880€$$
4. Déterminer combien couterait un forage de 40 mètres.
   $$\sum_{n=0}^{40} W_n = W_0 + W_1 + ... + W_{40} = \frac{80 + 880}{2} \times 41 = 19680€$$

Exercice 5. On veut construire une boite de lait à partir d'un carton carré de côté 30 cm, comme indiqué ci-dessous :



1. Donner l'intervalle sur lequel x varie.
   $$x \in [0, 15]$$
2. Montrer que l'expression du volume de la boite en fonction de x est donné par :
   $$V(x) = \underbrace{x}_{profondeur} \times \underbrace{(15 - x)}_{largeur} \times \underbrace{(30 - 2x)}_{hauteur} = x(450 - 60x + 2x^2) = 2x^3 - 60x^2 + 450x$$
3. Déterminer l'expression de la dérivée $V'(x)$ puis déterminer son signe et enfin dresser le tableau de variation de V.
   $$V'(x) = 6x^2 - 120x + 450$$
   On détermine son signe :
   $$\Delta = (-120)^2 - 4 \times 6 \times 450 = 60^2$$
   Les racines sont
   $$x_1 = \frac{120 - 60}{2 \times 6} = 5 \qquad et \qquad x_1 = \frac{120 + 60}{2 \times 6} = 15$$
   Le signe de $V'(x)$ est du signe de $a = 6 > 0$ à l'extérieur des racines. On obtient donc le tableau de variation :

x	0		5		15
$V'(x)$		+	0	−	0
$V(x)$	0	↗	1000	↘	0

$$f(5) = 2 \times 5^3 - 60 \times 5^2 + 450 \times 5 = 1000cm^3 = 1L$$

4. Donner la valeur de x permettant d'obtenir le volume maximal. Donner une valeur approchée de ce volume.
   On en déduit que la volume est maximal pour $x = 5cm$ et vaut $1L$