Corrigé du DS 4 : Suites et fonction exponentielle.

Exercice 1. La courbe $(\mathcal{C})$ ci-dessous représente dans un repère orthogonal une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-4\ ;\ 3]$. Les points A d'abscisse -3 et B$(0\,;\,2)$ sont sur la courbe $(\mathcal{C})$.

Sont aussi représentées sur ce graphique les tangentes à la courbe $(\mathcal{C})$ respectivement aux points A et B, la tangente au point A étant horizontale. On note f' la fonction dérivée de f.

Les parties A et B sont indépendantes

PARTIE A

1. Par lecture graphique, déterminer :
   (a) $f'(-3) = 0$ puisque la tangente au point d'abscisse -3 est horizontale ;
   (b) $f(0) = 2$ en effet le point $B(0,2)$ est un point de $(\mathcal{C})$ et $f'(0) = -3$ puisque le coefficient directeur de la tangente en B est -3 (je "pars" de B "j'avance" de 1 horizontalement puis "je descends" de 3 pour "revenir" sur la tangente.) .
2. La fonction f est définie sur $[-4; 3]$ par

$$f(x) = a + (x + b)\mathrm{e}^{-x}$$

où a et b sont deux réels que l'on va déterminer dans cette partie.

(a) Calculer $f'(x)$ pour tout réel x de $[-4; 3]$.

$$f'(x) = \mathrm{e}^{-x} - (x + b)\mathrm{e}^{-x} = (-x + 1 - b)\mathrm{e}^{-x}$$

(en effet, la dérivée de la constante a est nulle, puis l'expression $(x + b)\mathrm{e}^{-x}$ est de la forme uv dont la dérivée est $u'v + uv'$. On a :

$$\left\{\begin{array}{l} u = x + b \\ v = \mathrm{e}^{-x} \end{array}\right. \quad et \quad \left\{\begin{array}{l} u' = 1 \\ v' = -\mathrm{e}^{-x} \end{array}\right.$$

d'où le résultat précédent.)

(b) Á l'aide des questions 1. b. et 2. a., montrer que les nombres a et b vérifient le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a + b & = & 2 \\ 1 - b & = & -3 \end{array}\right.$$

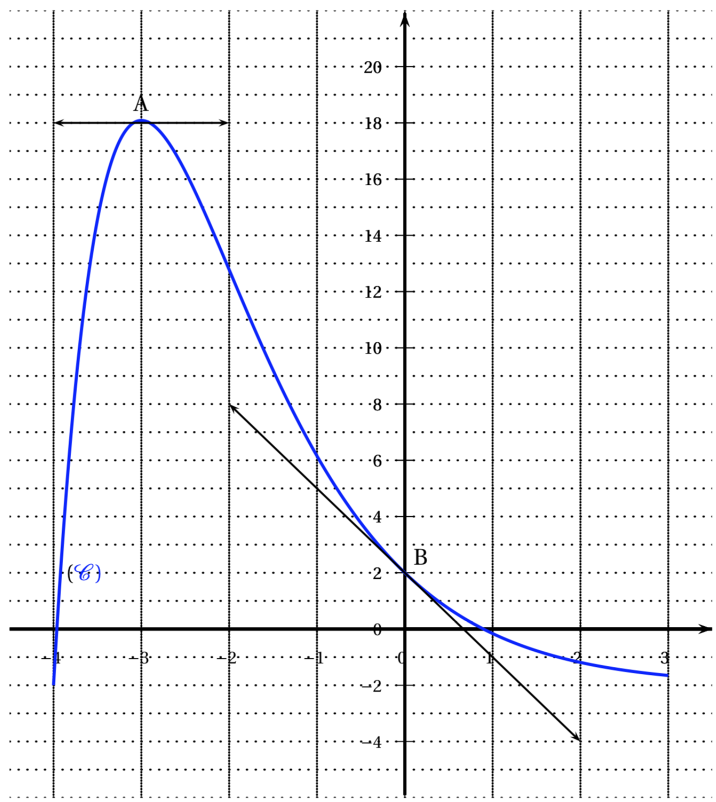
(c) Déterminer alors les valeurs des nombres a et b.
Avec les résultats de la question 2. (b), on obtient :

$$\left\{\begin{array}{l} f(0) = a + (0 + b)\mathrm{e}^{-0} = a + b = 2 \\ f'(0) = (-0 + 1 - b)\mathrm{e}^{-0} = (1 - b) = -3 \end{array}\right.$$

$$Donc \quad \left\{\begin{array}{l} a = 2 - b = -2 \\ b = 4 \end{array}\right.$$

Donc l'expression de f est :

$$f(x) = -2 + (x + 4)\mathrm{e}^{-x}.$$



PARTIE B

On admet que la fonction f est définie sur $[-4\ ;\ 3]$ par

$$f(x) = -2 + (x + 4)\mathrm{e}^{-x}.$$

1. Justifier que, pour tout réel x de $[-4;3]$, $f'(x) = (-x-3)\mathrm{e}^{-x}$ et en déduire le tableau de variation de f sur $[-4;3]$.
   On a trouvé à la partie précédente :
   $$f'(x) = (-x+1-b)\mathrm{e}^{-x} = (-x-3)\mathrm{e}^{-x} \quad \textit{puisque } b = 4$$
   Comme $\mathrm{e}^{-x} > 0$, la fonction f' est du signe de $-x-3$.
   Or $-x-3 > 0 \Leftrightarrow -3 > x$. D'où le tableau de variation :

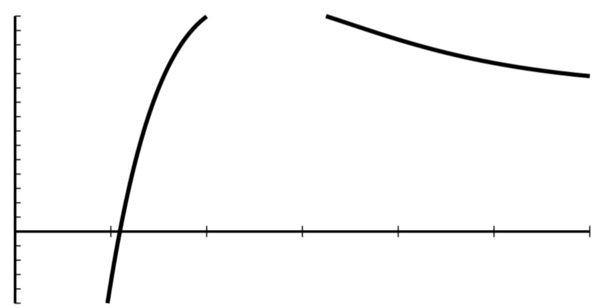
x	-4		-3	α	3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-2	$\nearrow$	$-2+\mathrm{e}^3$	$\searrow$ 0 $\searrow$	$-2+7\mathrm{e}^{-3}$

   En effet $f(-4) = -2+\mathrm{e}^3$, $f(-3) = -2+\mathrm{e}^3 > 0$ et $f(3) = -2+7\mathrm{e}^{-3} \simeq -1,8 < 0$
2. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[-3;3]$, puis donner une valeur approchée de α à 0,01 prés par défaut à l'aide de la calculatrice.
   D'après le tableau de variation, puisque $0 \in \left[-2+7\mathrm{e}^{-3}, -2+\mathrm{e}^3\right]$ et que sur l'intervalle $[-3,3]$ la fonction est strictement décroissante, nous pouvons affirmer (d'après de théorème des valeurs intermédiaires) que l'équation $f(x) = 0$ admet sur cet intervalle une unique solution.

Exercice 2. Le bénéfice en milliers d'euros que réalise une entreprise lorsqu'elle fabrique et vend x centaines d'objets (pour x compris entre 0 et 6) est donné par

$$f(x) = (200x-300)\mathrm{e}^{-x-1} + 10$$

Alix a affiché sur l'écran de sa calculatrice la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[0;6]$.



Partie A : objectif « réaliser un bénéfice maximal »

L'écran ne permet pas à Alix de déterminer le bénéfice maximal.

Il décide donc d'étudier la fonction f sur l'intervalle $[0;6]$. On admet que cette fonction est dérivable sur l'intervalle $[0;6]$. On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f.

1. Établir que, pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0;6]$,
   $$\begin{cases} u = (200x-300) \\ v = \mathrm{e}^{-x-1} \end{cases} \quad \textit{et} \quad \begin{cases} u' = 200 \\ v' = -\mathrm{e}^{-x-1} \end{cases}$$
   Donc :
   $$f'(x) = 200 \times \mathrm{e}^{-x-1} - (200x-300)\mathrm{e}^{-x-1} = (500-200x)\mathrm{e}^{-x-1}$$
2. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0;6]$.
   Comme $\mathrm{e}^{-x-1} > 0$, la fonction f' est du signe de $500-200x$.
   Or $500-200x > 0 \Leftrightarrow 500 > 200x \Leftrightarrow \frac{5}{2} > x$. D'où le tableau de variation :

x	0		$\frac{5}{2}$		6
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-300\mathrm{e}^{-1}+10$	$\nearrow$	$200\mathrm{e}^{\frac{-7}{2}}+10$	$\searrow$	$900\mathrm{e}^{-7}+10$

On a $f(0) = -300\mathrm{e}^{-1} + 10 \simeq -100$, $f\left(\frac{5}{2}\right) = 200\mathrm{e}^{\frac{-7}{2}} + 10 \simeq 16,04$ et enfin $f(6) = 900\mathrm{e}^{-7} + 10 \simeq 10,8$

3. En déduire le nombre d'objets à vendre pour réaliser un bénéfice maximal. Quel est ce bénéfice maximal en euros ? (Donner la réponse arrondie à l'euro).
   D'après le tableau de variation, le bénéfice maximal est atteint pour 250 objets vendus et vaut 16039 €.
4. Proposer un réglage de la fenêtre graphique permettant de visualiser le maximum de la fonction f.// Il faut que la fenêtre contienne le point de coordonnées $(2,5; 16,04)$ soit par exemple : $X_{min} = 0$, $X_{max} = 6$ puis $Y_{min} = 0$ et $Y_{max} = 17$.

Partie B : objectif « ne pas vendre à perte »

1. Au vu du graphique obtenu par Alix, à partir de combien d'objets l'entreprise ne vend-elle pas à perte ?
   Il semble que l'entreprise ne vende plus à perte à partir de 110 objets.
2. Démontrer que sur l'intervalle $[1; 2]$ l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution notée α.
   D'après le tableau de variation l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur l'intervalle $[0; 2,5]$. Puisque $f(1) = -100\mathrm{e}^{-2} + 10 \simeq -3,53 < 0$ et $f(2) = 100\mathrm{e}^{-3} + 10 \simeq 14,97 > 0$ la solution α est sur l'intervalle $[1; 2]$.
3. Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.
   A la machine à calculer, on obtient :

x	$1,09$	$1,1$
$f(x)$	$-0,142$	$0,203$

   Donc $\alpha \simeq 1,09$ à 10^{-2} près.
4. Préciser le nombre d'objets à partir duquel l'entreprise ne vend pas à perte.
   L'entreprise de vend plus à perte à partir de 110 objets vendus.

Exercice 3. Mathieu dispose d'un capital de 20000 € qu'il veut placer. Sa banque lui propose de choisir entre deux contrats d'épargne.

— Contrat A : Le capital augmente chaque année de 4 %.

— Contrat B : Le capital augmente chaque année de 2,5 % et une prime annuelle fixe de 330 euros est versée à la fin de chaque année et s'ajoute au capital.

On note a_n le capital, en euro, acquis au bout de n années si Mathieu choisit le contrat A ;
b_n le capital, en euro, acquis au bout de n années si Mathieu choisit le contrat B.
On a donc $a_0 = b_0 = 20\ 000$ et, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 1,04a_n$ et $b_{n+1} = 1,025b_n + 330$.

1. Dans cette question, on suppose que Mathieu choisit le contrat A.
   (a) Calculer la valeur, arrondie à l'euro, du capital disponible au bout de 10 ans. La suite (a_n) est géométrique de premier terme $a_0 = 20\ 000$ et de raison $q = 1,04$; donc, pour tout n, on a $a_n = a_0 \times q^n = 20\ 000 \times 1,04^n$.
   Donc $a_{10} = 20\ 000 \times 1,04^n \approx 29\ 605$.
   Le capital disponible au bout de 10 ans est, arrondi é l'euro, 29605 €.
   (b) Déterminer le pourcentage d'augmentation du capital entre le capital de départ et celui obtenu au bout de 10 ans. Arrondir le résultat à 1 %. Le pourcentage d'augmentation est donné par la formule $\dfrac{\text{valeur finale} - \text{valeur initiale}}{\text{valeur initiale}} \times 100$ donc ici : $\dfrac{29\ 605 - 20\ 000}{20\ 000} \times 100 \approx 48$.
   Le pourcentage d'augmentation en 10 ans a pour valeur arrondie Ã l'unité 48 %.
2. Dans cette question, on suppose que Mathieu choisit le contrat B.
   On considère la suite (u_n) définie pour tout n par $u_n = 13\ 200 + b_n$; donc $b_n = u_n - 13\ 200$.
   (a) Montrer que la suite (u_n) est géométrique de raison $1,025$ et calculer son premier terme u_0.

- $u_{n+1} = 13\,200 + b_{n+1} = 13\,200 + 1,025 b_n + 330 = 13\,530 + 1,025(u_n - 13\,200)$
  $= 13\,530 + 1,025 u_n - 13\,530 = 1,025 u_n$
- $u_0 = 13\,200 + b_0 = 13\,200 + 20\,000 = 33\,200$

Donc la suite (u_n) est géométrique de premier terme $u_0 = 33\,200$ et de raison $q = 1,025$.

(b) Donner l'expression de u_n en fonction de n. On en déduit que, pour tout n, $u_n = u_0 \times q^n = 33\,200 \times 1,025^n$.

(c) En déduire que, pour tout entier naturel n, on a $b_n = u_n - 13\,200$ donc, pour tout n :

$$b_n = 33\,200 \times 1,025^n - 13\,200$$

(d) Déterminer au bout de combien d'années le capital disponible devient supérieur à 40 000 euros. Le capital devient supérieur Ã 40 000 pour n tel que $b_n > 40\,000$; on résout cette inéquation :
$b_n > 40\,000 \iff 33\,200 \times 1,025^n - 13\,200 > 40\,000 \iff 33\,200 \times 1,025^n > 53\,200 \iff 1,025^n > \dfrac{53\,200}{33\,200} \iff \ln\left(1,025^n\right) > \ln\left(\dfrac{532}{332}\right) \iff n \times \ln(1,025) > \ln\left(\dfrac{532}{332}\right) \iff$
$n > \dfrac{\ln\left(\frac{532}{332}\right)}{\ln(1,025)} \dfrac{\ln\left(\frac{532}{332}\right)}{\ln(1,025)} \approx 19,1$ donc le capital devient supÃ©rieur Ã 40 000 € au bout de 20 ans.

3. On considère l'algorithme suivant :

> **Variables**
> A est un nombre réel
> B est un nombre réel
> N est un nombre entier naturel
> **Traitement**
> A prend la valeur 20 000
> B prend la valeur 20 000
> N prend la valeur 0
> Tant que $A \leqslant B$
> A prend la valeur $1,04 \times A$
> B prend la valeur $1,025 \times B + 330$
> N prend la valeur $N + 1$
> Fin Tant que
> **Sortie**
> Afficher N

(a) Le tableau ci-dessous traduit l'exécution pas à pas de l'algorithme.
Recopier et compléter ce tableau en arrondissant les valeurs de A et de B à l'unité :

Valeur de A	20 000	20 800	21 632	22 497	23 397	24 333	25 306
Valeur de B	20 000	20 830	21 681	22 553	23 446	24 362	25 301
Valeur de N	0	1	2	3	4	5	6
Condition $A \leqslant B$	vraie	vraie	vraie	vraie	vraie	vraie	fausse

(b) Donner la valeur affichée en sortie par cet algorithme et interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice. La valeur affichée en fin d'algorithme est 6.
Si Mathieu veut faire un placement d'une durée inférieure à 6 ans, il vaut mieux qu'il prenne le contrat A, sinon il vaut mieux prendre le contrat B.