∽ DS 5 du 10 janvier 2022 : Durée 1h ∾

Exercice 1 : Calculer la dérivée puis construire le tableau de variations de la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 50\ln(x) - x^2 - 4$$

Exercice 2 : Calculer la dérivée puis construire le tableau de variations de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = 4x + 2\mathrm{e}^{-2x}$$

Exercice 3 : Résoudre l'inéquation :

$$\ln(10x+2) \geqslant \ln(x+10)$$

Vous déterminerez dans un premier temps l'ensemble de définition, puis ensuite l'ensemble solution.

Exercice 4 : Résoudre l'inéquation :

$$\ln(-7x-28) \geqslant \ln(x+15)$$

Vous déterminerez dans un premier temps l'ensemble de définition, puis ensuite l'ensemble solution.

Exercice 5 : Résoudre l'inéquation :

$$-5\mathrm{e}^{8t+4} + 4 > 0$$

Vous déterminerez dans un premier temps l'ensemble de définition, puis ensuite l'ensemble solution.

Exercice 6 : L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. On considère les deux droites d et d' de représentation paramétrique respective

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & -3+t \\ y & = & 2-2t \\ z & = & 2+t \end{array}\right. ,t \in \mathbb{R} \qquad \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1+u \\ y & = & 1+u \\ z & = & 2+u \end{array}\right. ,u \in \mathbb{R}.$$

On note Δ la perpendiculaire commune à d et d' si elle existe.

1. Donner un vecteur directeur et un point de d que vous noterez respectivement $\vec{u}$ et A puis de même un vecteur directeur et un point de d' que vous noterez respectivement $\vec{v}$ et B.
2. Ces deux droites sont-elles parallèles ? Sont-elles orthogonales ? Sont-elles perpendiculaires ?
3. Parmi les trois vecteurs ci-dessous, indiquez celui qui est **directeur de** Δ :

   a) $\vec{s} : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ b) $\vec{w} : \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ c) $\vec{r} : \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

4. On note $\mathscr{P}$ le plan contenant les droites d' et Δ. Parmi les trois équations cartésiennes ci-dessous, une et une seule est une équation cartésienne de $\mathscr{P}$. Indiquez laquelle en justifiant.

   a) $x - 2y + z - 1 = 0$ b) $x + y + z - 4 = 0$ c) $-x + z - 1 = 0$

5. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de $\mathscr{P}$ et d : **ce point sera donc un point de** Δ. On notera ce point E. La droite d est-elle perpendiculaire à $\mathscr{P}$ (vous justifierez)
6. En déduire une représentation paramétrique de la droite Δ.
7. Parmi les coordonnées ci-dessous, indiquez celles de l'intersection (que l'on a noté E) de d et Δ, et celles de l'intersection (que l'on notera F) de d' et Δ.
   - $(-2, 0, 3)$
   - $(1, 1, 2)$
   - $(0, 0, 1)$
   - $(1, 1, 1)$
8. Déterminer la distance de d à d'.
9. On note $M(-3+t, 2-2t, 2+t)$ un point de d et $N(1+u, 1+u, 2+u)$ un point de d'.

   a. Montrer que : $MN^2 = 3u^2 + 6u + 6t^2 - 12t + 17$

   b. Déterminer les valeurs de u et de t pour que l'expression ci-dessus soit minimale et déterminer alors la valeur de MN

   c. Déterminer les coordonnées des points M et N pour ces valeurs de t et u.
10. Déterminer le projeté orthogonale puis la distance de A à $\mathscr{P}$.