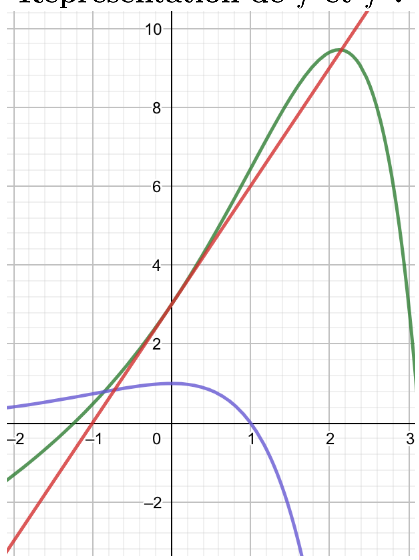
DS 4 : Suites numériques et fonction exponentielle.

Consignes :

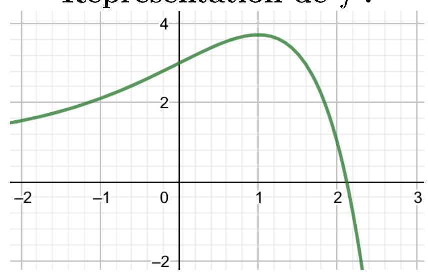
- Durée 1h45.
- Calculatrice autorisée.
- Justifiez vos réponses.

Exercice 1. La courbe $(\mathcal{C}_1)$ ci-dessous représente, dans un repère orthonormé, une fonction f définie et deux fois dérivable sur $[-2\ ;\ 3]$. Le point $A(0;3)$ est un point de $(\mathcal{C}_1)$. On a représenté en A la tangente à la courbe $(\mathcal{C}_1)$.

Représentation de f et f''.



Représentation de f'.



- On note f' la fonction dérivée de f et f'' la fonction dérivée seconde de f.
- La courbe $(\mathcal{C}_3)$ ci-dessous représente, dans le repère orthonormé, la fonction f''.
- Le point $B(1;0)$ est le point d'intersection de $(\mathcal{C}_3)$ avec l'axe des abscisses.
- On note D le point de $(\mathcal{C}_1)$ d'abscisse 1.‘
- La courbe $(\mathcal{C}_2)$ ci-dessous représente, dans le repère orthonormé, la fonction f'. (graphique de droite)
- Le point E est le point d'intersection de $(\mathcal{C}_2)$ avec l'axe des abscisses. Une valeur approchée de l'abscisse α de E est $\alpha \simeq 2,12$.

1. Par lecture graphique,
   (a) $f(0) = 3$ car $A(0;3)$ est un point de $(\mathcal{C}_1)$.
   (b) $f'(0) = 3$, puisque la tangente à la courbe représentative $(\mathcal{C}_1)$ de la fonction f à pour coefficient directeur 3.
   (c) Étudier la convexité de f sur $[-2\ ;\ 3]$ et les points d'inflexion de la courbe $(\mathcal{C}_1)$. Justifier la réponse.

	Sur $[-2;1]$	Sur $[1;3]$
Signe de f''	+	-
Convexité de f	f est convexe.	f est concave.

Par ailleurs, f'' change de signe en 1, donc le point D de $(\mathcal{C}_1)$ d'abscisse 1 est un point d'inflexion de $(\mathcal{C}_1)$.

2. On admet désormais que la fonction f est définie pour tout réel x dans $[-2\ ;\ 3]$ par :

$$f(x) = (3-x)\mathrm{e}^x + x.$$

Un logiciel de calcul formel donne les résultats suivants :

1	$f(x) :\ = (3-x) * \exp(x) + x$ $\rightarrow (3-x)\mathrm{e}^x + x$
2	dériver($f(x)$) $\rightarrow (2-x)\mathrm{e}^x + 1$
3	factoriser(dériver($f'(x)$)) $\rightarrow (1-x)\mathrm{e}^x$

(a) Vérifier le résultat trouvé par le logiciel pour le calcul de $f'(x)$.

$$f'(x) = -1 \times \mathrm{e}^x + (3-x)\mathrm{e}^x + 1 = (2-x)\mathrm{e}^x + 1$$

(b) Vérifier le résultat trouvé par le logiciel pour le calcul de $f''(x)$.

$$f''(x) = (f'(x))' = -1 \times \mathrm{e}^x + (2-x)\mathrm{e}^x + 0 = (1-x)\mathrm{e}^x$$

(c) Étudier le signe de $f''(x)$ puis dresser le tableau de variation de la fonction f' sur $[-2\ ;\ 3]$.
$\mathrm{e}^x > 0$, donc $f''(x)$ est du signe de $(1-x)$, d'où le tableau de variation de $f'(x)$:

x	-2		1		3
$f''(x)$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$	$4\mathrm{e}^{-2}+1$	$\nearrow$	$\mathrm{e}+1$	$\searrow$	$-\mathrm{e}^3+1$

$$f'(-2) = 4\mathrm{e}^{-2} + 1 \simeq 1,54 \qquad f'(1) = \mathrm{e} + 1 \simeq 2,71 \qquad f'(3) = -\mathrm{e}^3 + 1 \simeq -19,08$$

(d) Justifier que l'équation $f'(x) = 0$ possède une unique solution α dans $[-2\ ;\ 3]$. On notera α cette solution.
D'après le tableau de variation f' l'équation $f'x) = 0$ admet une unique solution. Cette solution est sur $[1; 3]$. Une valeur approché de cette solution α est donnée dans l'énoncé $\alpha \simeq 2,12$

3. (a) Recopier et compléter le tableau de variation ci-dessous. On pourra compléter le tableau de variation en utilisant des valeurs approchées à 10^{-2} pour les valeurs de f) :

x	-2		α		3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-1.32	$\nearrow$	9.45	$\searrow$	3

$$f(-3) = 5\mathrm{e}^{-2} - 2 \simeq -1,32 \qquad f(\alpha) = (3-\alpha)\mathrm{e}^{\alpha} + \alpha \simeq 9,45 \qquad f(3) = 3$$

(b) Justifier que l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution β dans $[-1\ ;\ 2]$.
D'après le tableau de variation de f. L'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution et cette solution est sur l'intervalle $[-2; \alpha]$.

(c) Déterminer un encadrement de β d'amplitude $0,01$.
Puisque :

$$f(-1,24) \simeq -0,013 \qquad et \qquad f(-1,23) \simeq 0,0063$$

Un encadrement de β à $0,01$ près est : $-1,24 \leqslant \beta \leqslant -1,23$

4. Déterminer une équation de la tangente à $(\mathcal{C}_1)$ au point d'abscisse 1.
On utilise la formule donnant la tangente au point d'abscisse a : $T_a : y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

$$f'(1) = \mathrm{e} + 1 \qquad f(1) = 2\mathrm{e} + 1$$

Donc l'équation de la tangente à $(\mathcal{C}_1)$ au point d'abscisse 1 est :

$$y = (\mathrm{e}+1)(x-1) + 2\mathrm{e} + 1 = (\mathrm{e}+1)x + \mathrm{e}$$

5. On note F la fonction définie sur $[-1\ ;\ 2]$ par :

$$F(x) = \frac{1}{2}x^2 + (-x+4)\mathrm{e}^x$$

(a) Vérifiez que :

$$F'(x) = \frac{1}{2} \times 2x - 1 \times \mathrm{e}^x + (-x+4)\mathrm{e}^x = x + (3-x)\mathrm{e}^x = f(x)$$

(b) Déterminer une valeur approchée de $F(2) - F(1) = 8,12$.

Exercice 2. En janvier 2015, le directeur d'un musée d'art contemporain commande une enquête concernant les habitudes des visiteurs.

Le musée dispose d'un site internet. Pour acheter son billet, une personne intéressée peut se rendre au guichet d'entrée du musée ou commander un billet en ligne.

Trois types de visites sont proposés :

- La visite individuelle sans location d'audioguide.
- La visite individuelle avec location d'audioguide.
- La visite en groupe d'au moins 10 personnes. Dans ce cas, un seul billet est émis pour le groupe.

Le site internet permet uniquement d'acheter les billets individuels avec ou sans audioguide.
Pour la visite de groupe, il est nécessaire de se rendre au guichet d'entrée du musée.

Sur l'année 2015 l'enquête a révélé que :

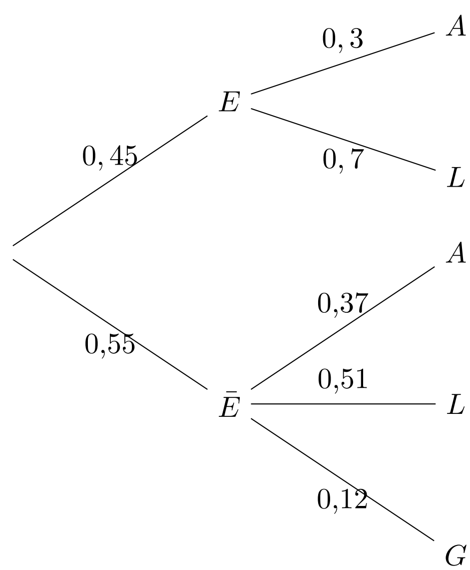
- 55 % des billets d'entrée ont été achetés au guichet du musée ;
- parmi les billets achetés au guichet du musée, 51 % des billets correspondent à des visites individuelles sans location d'audioguide, et 37 % à des visites avec location d'audioguide ;
- 70 % des billets achetés en ligne correspondent à des visites individuelles sans location d'audioguide.

On choisit au hasard un billet d'entrée au musée acheté en 2015.
On considère les évènements suivants :

- E : « le billet a été acheté en ligne » ;
- A : « le billet correspond à une visite individuelle avec location d'audioguide » ;
- L : « le billet correspond à une visite individuelle sans location d'audioguide » ;
- G : « le billet correspond à une visite de groupe ».

On rappelle que si E et F sont deux évènements, $p(E)$ désigne la probabilité de l'évènement E et $p_F(E)$ désigne la probabilité de l'évènement E sachant que l'évènement F est réalisé. On note $\overline{E}$ l'évènement contraire de E.

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré suivant qui représente la situation décrite dans l'énoncé :



2. La probabilité que le billet ait été acheté en ligne et corresponde à une visite individuelle avec location d'audioguide est égale à :

$$p(E \cap A) = P(E) \times P_E(A) = 0,45 \times 0,30 = 0,135$$

.

3. D'après la formule des probabilités totales :

$$p(A) = p(E \cap A) + p(\overline{E} \cap A) = P(E) \times P_E(A) + P(\overline{E}) \times P_{\overline{E}}(A) = 0,135 + 0,55 \times 0,37 = 0{,}338\,5$$

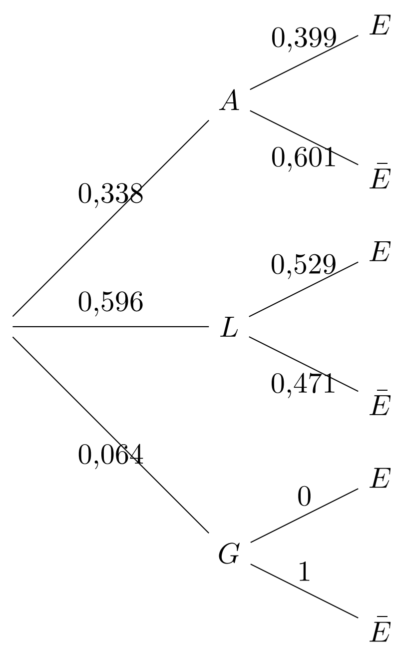
4. Le billet choisi correspond à une visite individuelle avec location d'audioguide. La probabilité que ce billet ait été acheté au guichet du musée est :

$$p_A(\overline{E}) = \frac{p(A \cap \overline{E})}{p(A)} = \frac{0,55 \times 0,37}{0{,}338\,5} \approx 0,601 \quad \text{à } 10^{-3} \textit{ près}$$

5. Déterminer les probabilités qui permettent de compléter l'arbre suivant et le compléter :

$$P(L) = 0,45 \times 0,7 + 0,55 \times 0,51 = 0,5955 \qquad P_L(E) = \frac{P(L \cap E)}{p5L)} = \frac{0,45 \times 0,7}{0,5955} \simeq 0,529$$

$$P(G) = 0,53 \times 0,12 = 0,0636 \qquad P_G(\overline{E}) = 0$$



Exercice 3. Pour déterminer la fréquence de poissons infectés dans un prélèvement, un laboratoire dispose d'un test de dépistage dont les résultats sont les suivants :

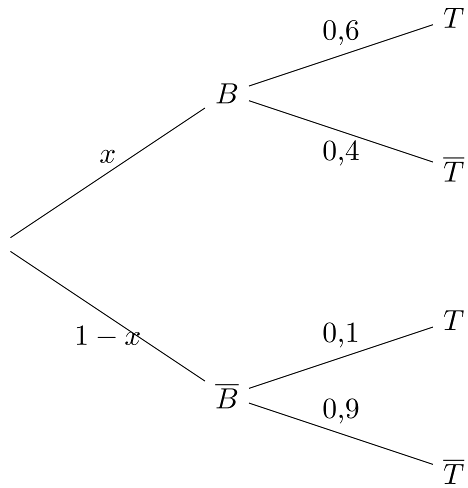
- sur des poissons infectés par la bactérie, le test est positif dans 60 % des cas ;
- sur des poissons non infectés par la bactérie, le test est positif dans 10 % des cas.

Pour un poisson prélevé au hasard, on note :

- B l'évènement : « le poisson est infecté par la bactérie » ;
- T l'évènement : « le test du poisson est positif » ;
- $\overline{B}$ et $\overline{T}$ les évènements contraires de B et T.

On note x la probabilité qu'un poisson soit infecté par la bactérie.

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré traduisant cette situation.



2. (a) D'après la formule des probabilités totales :

$$p(T) = p(B \cap T) + p\left(\overline{B} \cap T\right) = p(B) \times p_B(T) + p\left(\overline{B}\right) \times p_{\overline{B}}(T) = x \times 0,6 + (1-x) \times 0,1$$
$$= 0,6x + 0,1 - 0,1x = 0,5x + 0,1$$

   (b) Le laboratoire a constaté que $12,5\,\%$ des poissons d'un prélèvement ont eu un test positif.
   On a donc $p(T) = 0,125 \iff 0,5x + 0,1 = 0,125 \iff 0,5x = 0,025 \iff x = 0,05$.

   (c) On peut donc estimer à $5\,\%$ la proportion de poissons infectés que le laboratoire va proposer.

3. (a) On a prélevé un poisson dont le test est positif. Déterminer la probabilité pour que le poisson soit infecté par la bactérie.

$$P_T(B) = \frac{P(T \cap B)}{P(T)} = \frac{0,05 \times 0,6}{0,125} = 0,24$$

   (b) On a prélevé un poisson dont le test est négatif. Déterminer la probabilité pour que le poisson soit infecté par la bactérie.

$$P_{\overline{T}}(B) = \frac{P(\overline{T} \cap B)}{P(\overline{T})} = \frac{0,05 \times 0,4}{0,875} = 0,023$$

4. Reproduire et compléter l'arbre pondéré suivant :