DS 7 : Intégration, probabilité et logarithme

Exercice 1 **6,5 points**

Tous les résultats demandés dans cet exercice seront arrondis au millième.

Une entreprise produit des valises de deux types : des valises à deux roues et des valises à quatre roues. Sur chacun des deux modèles, on effectue des tests afin d'évaluer leur solidité.

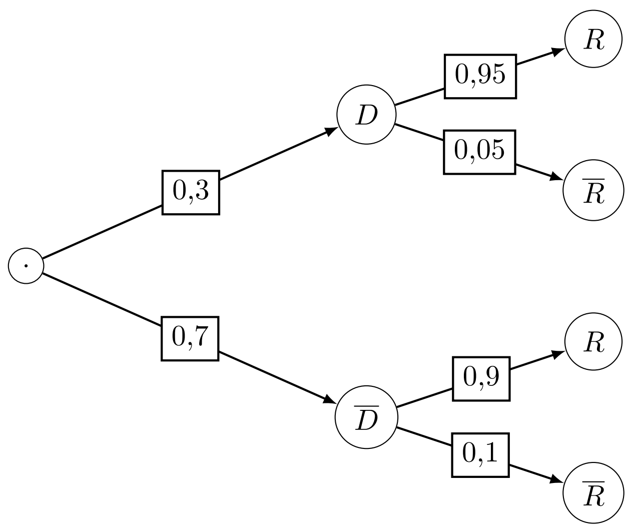
On dispose des informations suivantes sur le stock de production de cette entreprise :

- le stock contient 30 % de valises à deux roues ;
- 95 % des valises à deux roues réussissent les tests ;
- 63 % des valises sont des valises à quatre roues **et** qui ont réussi les tests.

On choisit au hasard une valise de ce stock. On considère les évènements suivants :

- D : « La valise a deux roues » ;
- R : « La valise réussit les tests ».

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous, au fur et à mesure de l'exercice :



2. On choisit une valise à quatre roues, déterminer la probabilité qu'elle réussisse les tests.

$$P_{\overline{D}}(R) = \frac{P(R \cap \overline{D})}{P(\overline{D})} = \frac{0{,}63}{0{,}7} = 0{,}9$$

3. Démontrer que la probabilité que la valise choisie réussisse les tests est de 0,915.

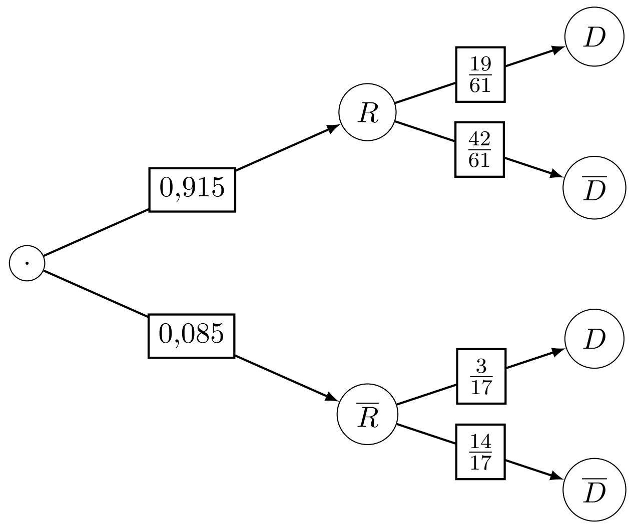
$$P(R) = P(D \cap R) + P(\overline{D} \cap R = P(D) \times P_D(R) + P(D \cap R) = 0{,}3 \times 0{,}95 + 0{,}63 = 0{,}915$$

4. Sachant que la valise réussit les tests, quelle est la probabilité que ce soit une valise à quatre roues ?

$$P_R(\overline{D}) = \frac{P(R \cap \overline{D})}{P(R)} = \frac{0{,}63}{0{,}915} = \frac{42}{61} \simeq 0{,}689$$

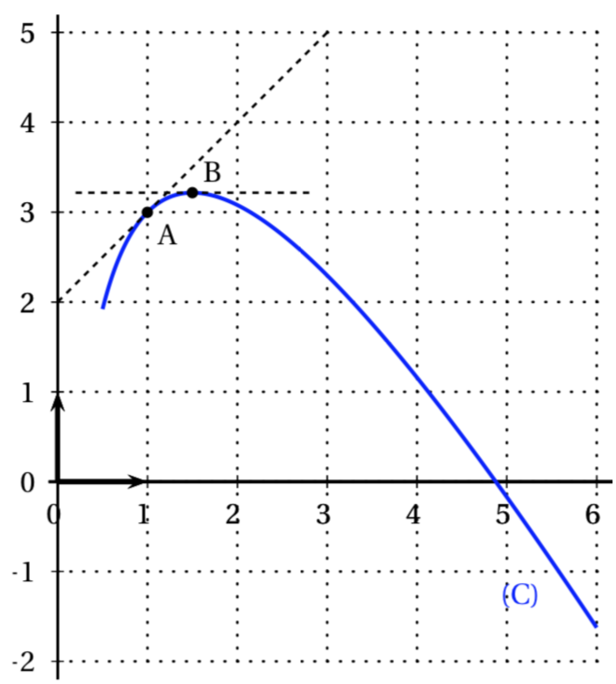
$$P_{\overline{R}}(\overline{D}) = \frac{P(\overline{R} \cap \overline{D})}{P(\overline{R})} = \frac{0{,}7 \times 0{,}1}{1 - 0{,}915} = \frac{14}{17} \simeq 0{,}824$$

5. Recopier et compléter l'arbre :



Exercice 2 **9,5 points**
Commun à tous les candidats

La courbe (C) ci-dessous représente, dans un repère orthonormé, une fonction f définie et dérivable sur $[0{,}5\ ;\ 6]$.
Les points A (1 ; 3) et B d'abscisse 1,5 sont sur la courbe (C).
Les tangentes à la courbe (C) aux points A et B sont aussi représentées en pointillés sur ce graphique, la tangente au point B est horizontale.
On note f' la fonction dérivée de f.



Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A : Étude graphique

1. Déterminer $f'(1{,}5) = 0$, puisque la tangente en B (d'abscisse 1,5) est horizontale.
2. La tangente à la courbe (C) passant par A passe par le point de coordonnées $(0\ ;2)$. Déterminer une équation de cette tangente.
   L'ordonnée à l'origine est donc 2. Par lecture graphique, son coefficient directeur est 1. Donc l'équation de la tangente est $y = x + 2$. On peut donc affirmer que $f'(1) = 1$.

3. Donner un encadrement de l'aire, en unités d'aire et à l'unité près, du domaine compris entre la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.

$$3 \leqslant \int_1^2 f(x)\mathrm{d}x \leqslant 4$$

4. Déterminer la convexité de la fonction f sur [0,5 ; 6]. Argumenter la réponse.
   La courbe est systématiquement en dessous de ses tangentes donc la fonction est concave.

Partie B :Étude analytique

On admet que la fonction f est définie sur [0,5 ; 6] par

$$f(x) = -2x + 5 + 3\ln(x).$$

1. Pour tout réel x de [0,5 ; 6], calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = \dfrac{-2x+3}{x}$.

$$f'(x) = -2 + 3\frac{1}{x} = \frac{-2x+3}{x}$$

2. Étudier le signe de f' sur [0,5 ; 6] puis dresser le tableau de variation de f sur [0,5 ; 6].
   Pour l'étude du signe de f', on remarque que $x > 0$ sur l'intervalle d'étude donc $f'(x)$ est du signe de $-2x+3$.

$$-2x + 3 > 0 \Leftrightarrow -2x > -3 \Leftrightarrow x < \frac{3}{2}$$

x	0.5		$\frac{3}{2}$		6
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$4 - 3\ln 2$	$\nearrow$	$2 + 3\ln\frac{3}{2}$	$\searrow$	$-7 + 3\ln 6$

$$f(0{,}5) = -2 \times 0{,}5 + 5 + 3\ln 0{,}5 = 4 - 3\ln 2 > 0 \quad ; \quad f\left(\frac{3}{3}\right) = 2 + 3\ln\frac{3}{2} > 0 \quad ; \quad f(6) = -7 + 3\ln 6 < 0$$

3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement une solution α sur [0,5 ; 6]. Donner un encadrement de α à 10^{-2} près.
   D'après le tableau de variation, l'équation admet une unique solution sur [0,5 ; 6]. Cette solution est dans l'intervalle $[\frac{3}{2}\ ; 6]$. On a :

x	4,87	4,88
$f(x)$	0,0092	-0,004

   Donc $4{,}88 \leqslant \alpha \leqslant 4{,}89$.

4. En déduire le tableau de signe de f sur [0,5 ; 6].

x	0.5		α		6
$f(x)$		$+$	0	$-$	

5. On considère la fonction F définie sur [0,5 ; 6] par $F(x) = -x^2 + 2x + 3x\ln(x)$.
   (a) Montrer que F est une primitive de f sur [0,5 ; 6].

$$F'(x) = -2x + 2 + 3 \times \ln x + 3x \times \frac{1}{x} = -2x + 5 + 3\ln x = f(x)$$

   Donc F est bien une primitive de f.

(b) En déduire l'aire exacte, en unités d'aire, du domaine compris entre la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 2$. En donner ensuite une valeur arrondie au dixième.

$$\begin{aligned}\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x = [F(x)]_1^2 = F(2) - F(1) \\ &= -2^2 + 2\times 2 + 3\times 2\times \ln 2 - (-1^2 + 2\times 1 + 3\times 1\times \underbrace{\ln 1}_{=0}) \\ &= 6\ln 2 - 1\end{aligned}$$

Partie C : Étude de la convexité de F

On considère la fonction F définie sur [0,5 ; 6] par :

$$F(x) = -x^2 + 2x + 3x\ln(x)$$

On note $(\mathcal{C}_F)$ sa représentation graphique.

1. Expliquez pourquoi :

$$F'(x) = f(x) \quad \textit{donc} \quad F''(x) = f'(x) = \frac{-2x+3}{x}$$

2. En déduire la convexité de la fonction F, ainsi que les coordonnées du point d'inflexion de $(\mathcal{C}_F)$.

x	0.5		$\frac{3}{2}$		6
$F''(x)$		$+$	0	$-$	
convexité		*convexe*	0	*concave*	

Exercice 3 **4 points**
Commun à tous les candidats

1. Soit f la fonction définie sur l'intervalle [1 ; 25] par

$$f(x) = \frac{x+2-\ln(x)}{x}.$$

(a) On admet que f est dérivable sur [1 ; 25].
Démontrer que pour tout réel x appartient à l'intervalle [1 ; 25],

$$f'(x) = \frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)x - (x+2-\ln(x))}{x^2} = \frac{x-1-x-2+\ln x}{x^2} = \frac{-3+\ln(x)}{x^2}.$$

(b) Résoudre dans [1 ; 25] l'inéquation $-3 + \ln(x) > 0 \Leftrightarrow \ln x > 3 \Leftrightarrow x > \mathrm{e}^3 \simeq 20{,}09$.

(c) Dresser le tableau des variations de la fonction f sur [1 ; 25].

x	1		e^3		25
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	3	↘	1-e^{-3}	↗	$\frac{27-\ln 25}{25}$

$$f(1) = \frac{1+2+\ln 1}{1} = 3 \quad ; \quad f(\mathrm{e}^3) = \frac{\mathrm{e}^3+2-3\ln\mathrm{e}}{\mathrm{e}^3} = 1-\mathrm{e}^{-3} \quad ; \quad f(25) = \frac{27-\ln 25}{25}$$

(d) Déduire du tableau le variation, le signe de f sur $[1\,;\,25]$.
Comme $f(\mathrm{e}^3) = 1 - \mathrm{e}^3 > 0$ est le minimum de la fonction f sur l'intervalle $[1\,;\,25]$, on peut affirmer que $f(x)$ est positive sur cet intervalle.

(e) Démontrer que dans l'intervalle $[1\,;\,25]$, l'équation $f(x) = 1{,}5$ admet une seule solution. On notera α cette solution.
Puisque $f(25) = \frac{27-\ln 25}{25} < 1{,}5$ et avec le tableau de variation on peut affirmer que l'équation $f(x) = 1{,}5$ admet une unique solution sur $[1;25]$ et que cette solution est sur l'intervalle $\left[1{,}\mathrm{e}^3\right]$

(f) Déterminer un encadrement d'amplitude 0,01 de α à l'aide de la calculatrice.

x	2,31	2,32
$f(x)$	1,5033	1,4993

Donc $2{,}31 \leqslant \alpha \leqslant 2{,}32$.

2. On considère la fonction :

$$F(x) = x + 2\ln x - \frac{1}{2}(\ln x)^2$$

(a) Montrer que la fonction F est une primitive de la fonction f. (on utilisera la formule $(u^2)' = 2u'u$)

$$F'(x) = 1 + 2 \times \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{1}{x}\ln x = \frac{x + 2 - \ln(x)}{x}.$$

(b) En déduire l'aire exacte, en unités d'aire, du domaine compris entre la courbe représentative de f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = \mathrm{e}^3$. En donner ensuite une valeur arrondie au dixième.

$$\begin{aligned}\int_1^{\mathrm{e}^3} f(x)\mathrm{d}x &= [F(x)]_1^{\mathrm{e}^3} = F(\mathrm{e}^3) - F(1)\\ &= \mathrm{e}^3 + 2\ln \mathrm{e}^3 - \frac{1}{2}\left(\ln \mathrm{e}^3\right)^2 - \left(1 + 2\ln 1 - \frac{1}{2}(\ln 1)^2\right)\\ &= \mathrm{e}^3 + 6 - \frac{9}{2} - 1 = \mathrm{e}^3 + \frac{1}{2}\end{aligned}$$