DS 7 : Intégration, probabilité et logarithme

Exercice 1 **6,5 points**

Tous les résultats demandés dans cet exercice seront arrondis au millième.

Une entreprise produit des valises de deux types : des valises à deux roues et des valises à quatre roues. Sur chacun des deux modèles, on effectue des tests afin d'évaluer leur solidité.

On dispose des informations suivantes sur le stock de production de cette entreprise :

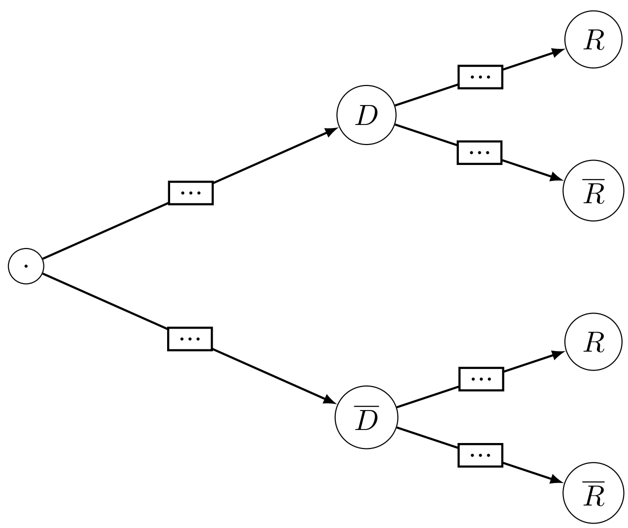
- le stock contient 30 % de valises à deux roues ;
- 95 % des valises à deux roues réussissent les tests ;
- 63 % des valises sont des valises à quatre roues **et** qui ont réussi les tests.

On choisit au hasard une valise de ce stock. On considère les évènements suivants :

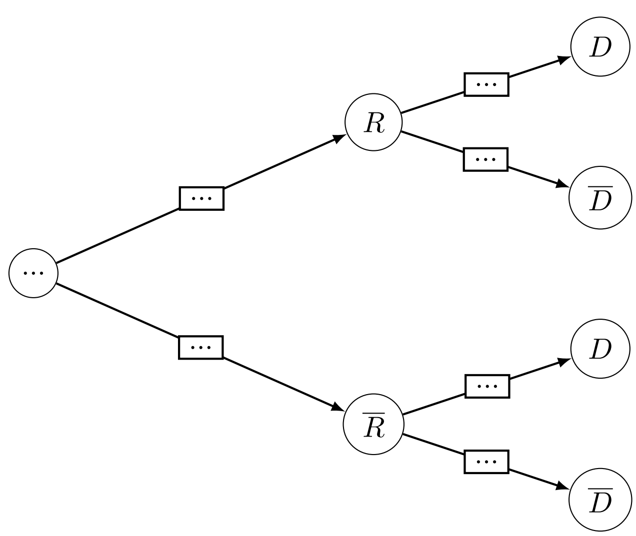
- D : « La valise a deux roues » ;
- R : « La valise réussit les tests ».

Dans cet exercices les résultats pourront être arrondis à 10^{-3} près.

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous, au fur et à mesure de l'exercice :

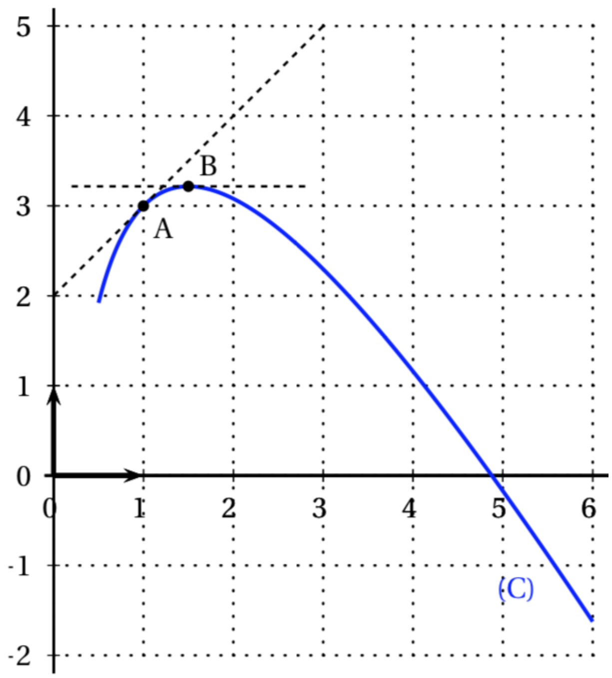


2. On choisit une valise à quatre roues, déterminer la probabilité qu'elle réussisse les tests.
3. Démontrer que la probabilité que la valise choisie réussisse les tests est de 0,915.
4. Sachant que la valise réussit les tests, quelle est la probabilité que ce soit une valise à quatre roues ?
5. Recopier et compléter l'arbre :



Exercice 2 **9,5 points**
Commun à tous les candidats

La courbe (C) ci-dessous représente, dans un repère orthonormé, une fonction f définie et dérivable sur $[0{,}5\ ;\ 6]$. Les points A (1 ; 3) et B d'abscisse 1,5 sont sur la courbe (C).
Les tangentes à la courbe (C) aux points A et B sont aussi représentées en pointillés sur ce graphique, la tangente au point B est horizontale.
On note f' la fonction dérivée de f.



<u>Les parties A et B sont indépendantes.</u>

Partie A : Étude graphique

1. Déterminer $f'(1{,}5)$.
2. La tangente à la courbe (C) passant par A passe par le point de coordonnées $(0\ ;2)$. Déterminer une équation de cette tangente.
3. Donner un encadrement de l'aire, en unités d'aire et à l'unité près, du domaine compris entre la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.
4. Déterminer la convexité de la fonction f sur $[0{,}5\ ;6]$. Argumenter la réponse.

Partie B :Étude analytique

On admet que la fonction f est définie sur $[0{,}5\,;\,6]$ par

$$f(x) = -2x + 5 + 3\ln(x).$$

1. Pour tout réel x de $[0{,}5\,;\,6]$, calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = \dfrac{-2x+3}{x}$.
2. Étudier le signe de f' sur $[0{,}5\,;\,6]$ puis dresser le tableau de variation de f sur $[0{,}5\,;\,6]$.
3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement une solution α sur $[0{,}5\ ;6]$.
   Donner un encadrement de α à 10^{-2} près.
4. En déduire le tableau de signe de f sur $[0{,}5\,;\,6]$.

5. On considère la fonction F définie sur $[0{,}5\,;\,6]$ par $F(x) = -x^2 + 2x + 3x\ln(x)$.
   (a) Montrer que F est une primitive de f sur $[0{,}5\,;\,6]$.
   (b) En déduire l'aire exacte, en unités d'aire, du domaine compris entre la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 2$. En donner ensuite une valeur arrondie au dixième.

Partie C : Étude de la convexité de F

On considère la fonction F définie sur $[0{,}5\,;\,6]$ par :

$$F(x) = -x^2 + 2x + 3x\ln(x)$$

On note $(\mathcal{C}_F)$ sa représentation graphique.

1. Expliquez pourquoi :
$$F''(x) = \frac{-2x+3}{x}$$
2. En déduire la convexité de la fonction F, ainsi que les coordonnées du point d'inflexion de $(\mathcal{C}_F)$.

Exercice 3 **4 points**
Commun à tous les candidats

1. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[1\,;\,25]$ par
$$f(x) = \frac{x + 2 - \ln(x)}{x}.$$
   (a) On admet que f est dérivable sur $[1\,;\,25]$.
   Démontrer que pour tout réel x appartient à l'intervalle $[1\,;\,25]$,
$$f'(x) = \frac{-3 + \ln(x)}{x^2}.$$
   (b) Résoudre dans $[1\,;\,25]$ l'inéquation $-3 + \ln(x) > 0$.
   (c) Dresser le tableau des variations de la fonction f sur $[1\,;\,25]$.
   (d) Déduire du tableau le variation, le signe de f sur $[1\,;\,25]$.
   (e) Démontrer que dans l'intervalle $[1\,;\,25]$, l'équation $f(x) = 1{,}5$ admet une seule solution. On notera α cette solution.
   (f) Déterminer un encadrement d'amplitude 0,01 de α à l'aide de la calculatrice.

2. On considère la fonction :
$$F(x) = x + 2\ln x - \frac{1}{2}(\ln x)^2$$
   (a) Montrer que la fonction F est une primitive de la fonction f. (on utilisera la formule $(u^2)' = 2u'u$)
   (b) En déduire que l'aire exacte, en unités d'aire, du domaine compris entre la courbe représentative de f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = \mathrm{e}^3$ est $\mathrm{e}^3 + \frac{1}{2}$. (représentation ci-contre)
   En donner ensuite une valeur arrondie au dixième.