Devoir sur table 1S du 15 février.

Exercice 1. On considère la série statistique X suivante :

x_i : valeurs	a	b	8
n_i : effectifs	5	2	3

Partie A

Dans cette partie, les valeurs sont $a = -12$ et $b = -2$.

1. Déterminer les valeurs de la moyenne et de l'écart type (à 10^{-2} près).

$$\overline{X} = -4 \quad et \quad \sigma(X) = \sqrt{76} \simeq 8,72$$

2. On définie la fonction f sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{3} n_i(x - x_i)^2 = \frac{5(x+12)^2 + 2(x+2)^2 + 3(x-8)^2}{10}$$

(a) Montrer que :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{5(x+12)^2 + 2(x+2)^2 + 3(x-8)^2}{10} \\ &= \frac{5(x^2+24x+144) + 2(x^2+4x+4) + 3(x^2-16x+64)}{10} \\ &= \frac{5x^2+120x+720+2x^2+8x+8+3x^2-48x+192}{10} \\ &= \frac{10x^2+80x+920}{10} \\ &= x^2+8x+92 \end{aligned}$$

(b) Dresser le tableau de variation de f.

$$f'(x) = 2x + 8 = 0 \Leftrightarrow x = -4$$

x	$-\infty$		-4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	76	$\nearrow$	$+\infty$

(c) En déduire que f admet un extremum, donner la valeur de cet extrémum et la valeur pour laquelle il est atteint (on notera $f(x_0)$ et x_0 ces deux valeurs). Que représente ces deux valeurs pour la série X
D'après le tableau de variation de f, elle admet un minimum en $x = 7$, Or 7 étant la moyenne on reconnait en $f(-4) = (-4)^2 - 8 \times 4 + 92 = 76$, la valeur de la variance de X.

Partie B

Déterminer les valeurs de a et b pour que

$$\overline{X} = 1 \qquad et \qquad V(X) = 28$$

$$\left\{\begin{array}{r}\overline{X} = \dfrac{5a+2b+3\times 8}{10} = 1\\ V(X) = \dfrac{5a^2+2b^2+3\times 8^2}{10} - 1^2 = 28\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c}5a+2b+24=10\\ 5a^2+2b^2+192-290=0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} b = -7-\dfrac{5}{2}a\\ 5a^2+2\left(-7-\dfrac{5}{2}a\right)^2-98=0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} b = -11-\dfrac{5}{2}a\\ 5a^2+2\left(49+35a+\dfrac{25}{4}a^2\right)-98=0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} b = -7-\dfrac{5}{2}a\\ \dfrac{35}{2}a^2+70a=0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} a=0 \quad et \quad b=-7\\ ou\\ a=-4 \quad et \quad b=3\end{array}\right.$$

On obtient donc deux solutions :

$$S = \{(0,-7);(-4,3)\}$$

Exercice 2. Un enseignant a prévu un contrôle trop long et il obtient une moyenne de 5 sur 20. La meilleur note est de 12/20. On note X la série des notes. L'écart type de cette série est de 4.

1. Il décide d'augmenter les notes de 50 % puis de rajouter 1 point. On note Y la nouvelle série de note ainsi obtenue.
   (a) Expliquer que l'on obtienne $Y = \underbrace{(1+0,5)\times X}_{on\ augmente\ les\ notes\ de\ 50\%} + \underbrace{1}_{On\ ajoute\ un\ point}$.
   (b) Déterminer la nouvelle moyenne obtenu pour cette classe, ainsi que son écart type.

$$\overline{Y} = \overline{1,5X+1} = 1,5\overline{X}+1 = 1,5\times 5+1 = 8,5 \quad et \quad \sigma(Y) = \sigma(1,5X+1) = 1,5\sigma(X) = 1,5\times 4 = 6$$

2. Cette fois l'enseignant souhaite trouver une formule qui lui permettrait d'obtenir une moyenne de 10,25 et un écart type de 5. On note Z la nouvelle série de note et on sait que l'enseignant applique une formule de la forme $Z = aX+b$ à la série X.
   (a) Déterminer les valeurs de a et b. Au vu des contraintes on obtient :

$$\left\{\begin{array}{c}\overline{Z} = a\overline{X}+b = 5a+b = 10,25\\ \sigma(Z) = a\sigma(X) = 4a = 5\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} b = 10,25-5a = 10,25-5\dfrac{5}{4} = 4\\ a = \dfrac{5}{4}\end{array}\right.$$

   (b) Déterminer alors la meilleur note de la classe avec cette formule. La meilleur note est :

$$\frac{5}{4}\times 12+4 = 19$$

Exercice 3. 1. Déterminer la mesure principale des angles :

(a) $\dfrac{25\pi}{4} = \dfrac{24\pi+\pi}{4} = 6\pi + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{4}(2\pi)$

(b) $\dfrac{-107\pi}{3} = \dfrac{-108\pi+\pi}{3} = -36\pi + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{3}(2\pi)$

(c) $\dfrac{67\pi}{6} = \dfrac{72\pi-5\pi}{6} = 12\pi\dfrac{-5\pi}{6} = \dfrac{-5\pi}{6}(2\pi)$

(d) $\dfrac{-100\pi}{3} = \dfrac{-102\pi+2\pi}{3} = -34\pi+\dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{2\pi}{3}(2\pi)$

2. Déterminer la valeur de :

(a) $\cos\left(\dfrac{25\pi}{4}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(b) $\sin\left(\dfrac{-107\pi}{3}\right) = \sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(c) $\sin\left(\dfrac{67\pi}{6}\right) = \sin\left(\dfrac{-5\pi}{6}\right) = -\dfrac{1}{2}$

(d) $\cos\left(\dfrac{-100\pi}{3}\right) = \cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = -\dfrac{1}{2}$

3. Exprimer les expressions suivante en fonction de $\cos x$ ou de $\sin x$:

(a) $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right) = -\sin x$

(b) $\sin(\pi+x) = -\sin x$

(c) $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right) = \cos x$

(d) $\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}+x\right) = -\cos x$

4. Résoudre les équations suivantes :

(a) $\sin(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$

$$x = \frac{\pi}{3}(2\pi) \quad \textit{ou} \quad x = \pi - \frac{\pi}{3}(2\pi)$$
$$x = \frac{2\pi}{3}(2\pi)$$

Donc $S = \left\{x = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z}\right\}$

(b) $\cos\left(3x+\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \cos\dfrac{\pi}{4}$

$$3x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4}(2\pi) \quad \textit{ou} \quad 3x + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{4}(2\pi)$$
$$3x = \frac{-\pi}{12}(2\pi) \quad \textit{ou} \quad 3x = \frac{-7\pi}{12}(2\pi)$$
$$x = \frac{-\pi}{36}\left(\frac{2\pi}{3}\right) \quad \textit{ou} \quad x = \frac{-7\pi}{36}\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

Donc $S = \left\{x = \dfrac{-\pi}{36} + \dfrac{2k\pi}{3} \text{ ou } x = \dfrac{-7\pi}{36} + \dfrac{2k\pi}{3} \ / \ k \in \mathbb{Z}\right\}$

Exercice 4. On possède un dé à 6 faces avec

- une face avec "1" ;
- deux faces avec "2".
- trois faces avec "3".

Partie A :

Dans cette partie, l'expérience aléatoire consiste à lancer le dé et à noter le résultat obtenu. On note X la variable donnant le résultat.

1. Déterminer la loi de probabilité de la variable X.

x_i	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$	$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

2. Déterminer l'espérance et la variance de la variable X.

$$E(X) = 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{2}{6} + 3 \times \frac{3}{6} = \frac{14}{6} = \frac{7}{3} \quad et \quad V(X) = 1^2 \times \frac{1}{6} + 2^2 \times \frac{2}{6} + 3^2 \times \frac{3}{6} - \left(\frac{7}{3}\right)^2 = \frac{5}{9}$$

3. Le joueur mise 13 € et gagne 6 fois la valeur obtenue lors du lancé. On note Y le gain algébrique du joueur. Déterminer l'espérance et la variance de la variable Y.

$$Y = 6X - 13 \quad \text{donc} \quad E(Y) = 6E(X) - 13 = 6 \times \frac{7}{3} - 13 = 1 \quad \text{et} \quad V(Y) = 6^2 \times V(X) = 36 \times \frac{5}{9} = 20$$

4. On note $Z = \dfrac{1}{X}$. Déterminer l'espérance et la variance de la variable Z.

$$E(Z) = \frac{1}{1} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad V(Z) = \frac{1}{1^2} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{2^2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} \times \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{18}$$

Partie B :

Dans cette partie, on lance le dé 3 fois et l'on note R la variable aléatoire qui consiste à déterminer le nombre de fois où l'on obtient la valeur 2.

1. Déterminer la loi de probabilité de R.

r_i	0	1	2	3
$P(R = r_i)$	$\frac{8}{27}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{27}$

2. Déterminer l'espérance et la variance de la variable R.

$$E(R) = 1 \quad et \quad V(R) = \frac{2}{3}$$

Partie C :

Dans cette partie, on lance le dé 2 fois et l'on note T la variable aléatoire qui consiste à déterminer la somme des valeurs obtenues lors des deux lancés.

1. Déterminer la loi de probabilité de T.

t_i	2	3	4	5	6
$P(T = t_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$

2. Déterminer l'espérance et la variance de la variable T.

$$E(T) = \frac{2 + 12 + 40 + 60 + 56}{36} = \frac{168}{36} = \frac{14}{3} \quad \text{et} \quad V(T) = \frac{4 + 36 + 160 + 300 + 336}{36} - \frac{14^2}{3^2} = \frac{10}{9}$$