DS 1 : Second degré.

Question de cours : (1 point) On considère une fonction polynomial f donnée par l'expression $f(x) = ax^2 + bx + c$ (où a, b et c sont trois réels)

On pose $\alpha = \dfrac{-b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$.

a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$.

$$\begin{aligned}
a(x-\alpha)^2 + \beta &= a\left(x - \frac{-b}{2a}\right)^2 + f(\alpha) \\
&= a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) + a \times \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c \\
&= ax^2 + bx + \frac{b}{4a} + \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c \\
&= ax^2 + bx + c = f(x)
\end{aligned}$$

b) On suppose dans cette question que $\Delta = b^2 - 4ac > 0$. Par ailleurs on admet que :

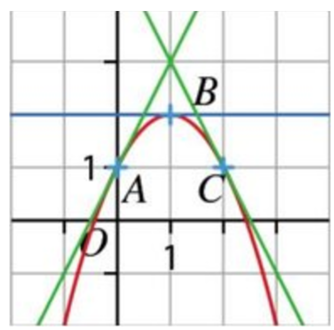
$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right)$$

Trouvez la forme factorisée de f.

$$\begin{aligned}
f(x) = ax^2 + bx + c &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] \\
&= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right] \\
&= a\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)
\end{aligned}$$

Exercice 1 *(2 points)*

Ci-contre, nous avons la représentation graphique d'une fonction f et de trois de ses tangentes tracées aux points A, B et C d'abscisses respectives 0, 1 et 2.



Déterminer graphiquement les valeurs de $f(0) = 1$, $f'(0) =$ coef direct de la tan en $0 = 2$, $f(1) = 2$, $f'(1) = 0$, $f(2) = 1$ et $f'(2) = -2$.

Déterminer l'équation de la tangente en A (Vous pourrez vous contenter d'une lecture graphique de l'ordonnée à l'origine) $y = 2x + 1$

Exercice 2 *(3 points)*

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x^2$$

On note $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique.

a. Montrer que f est dérivable en 1 et déterminer le nombre dérivé $f'(1)$. (Rappel : qu'il faut déterminer le taux d'accroissement en 1, puis sa limite. Si cette limite existe, la fonction est dérivable et le nombre dérivée est cette limite)

$$\tau_1(h) = \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{(1+h)^2 - 1}{h} = \frac{1 + 2h + h^2 - 1}{h} = 2 + h \underbrace{\to}_{h\to 0} 2$$

Donc la limite du taux d'accroissement existe et vaut 2. La fonction f est donc dérivable et sa valeur est $f'(1) = 2$.

b. Déterminer l'équation de la tangente en 1 à $\mathscr{C}_f$.
La formule donnant l'équation de la tangente est $T_a: \ y = f'(a)(x-a) + f(a)$, donc

$$T_1 : y = f'(1)(x-1) + f(1) = 2(x-1) + 1 = 2x - 1$$

2. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = 1 + \frac{3}{x}$$

Montrer que g est dérivable en 5 et donner la valeur de $g'(5)$.

$$\tau_5(h) = \frac{g(5+h) - g(5)}{h} = \frac{1 + \frac{3}{5+h} - \left(1 + \frac{3}{5}\right)}{h} = \frac{\frac{3}{5+h} - \frac{3}{5}}{h} = \frac{15 - 3(5+h)}{5(5+h)} \times \frac{1}{h} = \frac{-3}{h+5} \underbrace{\longrightarrow}_{h\to 0} \frac{-3}{25}$$

Donc g est dérivable en 5 est son nombre dérivée est $g'(5) = \dfrac{-3}{25}$.

Exercice 3 *(2,5 points)*

Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x^3 + 6x^2 + 25x - 82$.

1. Déterminer la valeur de $h(2)$.

$$h(2) = 8 + 24 + 50 - 82 = 0$$

2. Déterminer des réels a, b et c de sorte que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = (x-2)(ax^2 + bx + c)$$

$$h(x) = (x-2)(ax^2+bx+c) = ax^3 + (b-2a)x^2 + (c-2b)x - 2c = x^3 + 6x^2 + 25x - 82 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b - 2a = 6 \\ c - 2b = 25 \\ -2c = -82 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 6 + 2a = 8 \\ c = 25 + 2b = 41 \end{cases}$$

3. Déterminer le nombre de solution de $h(x) = 0$.

$$h(x) = (x-2)(x^2 + 8x + 41) = 0 \Leftrightarrow x - 2 = 0 \quad \text{ou} \quad x^2 + 8x + 41 = 0$$

- $x^2 + 8x + 41$ on a $\Delta = 64 - 4 \times 41 < 0$ donc pas de racine réel.

Donc $S = \{2\}$.

Exercice 4 *(4 points)* Résoudre les inéquations suivantes :

a) $-x^2 + 7x \leqslant 2x - 6$

$$-x^2 + 7x \leqslant 2x - 6 \Leftrightarrow 0 \leqslant x^2 - 5x - 6$$

On a $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 49 = 7^2$. Donc :

$$x_1 = \frac{5+7}{2} = 6 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{5-7}{2} = -1$$

Comme $a = 1 > 0$, on a $S =]-\infty, -1] \cup [6, +\infty[$.

b) $\dfrac{3}{x} \leqslant x + 2$

$$\frac{3}{x} \leqslant x + 2 \Leftrightarrow 0 \leqslant \frac{x^2 + 2x - 3}{x}$$

- Pour $x^2 + 2x - 3$ on a $\Delta = 16 = 4^2$. Donc :

$$x_1 = \frac{-2-4}{2} = -3 \qquad \text{et} \qquad x_2 = 1$$

- Pour x évident

x	$-\infty$		-3		0		1		$+\infty$
x^2+2x-3		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{x^2+2x-3}{x}$		$-$	0	$+$	$\|$	$-$	0	$+$	

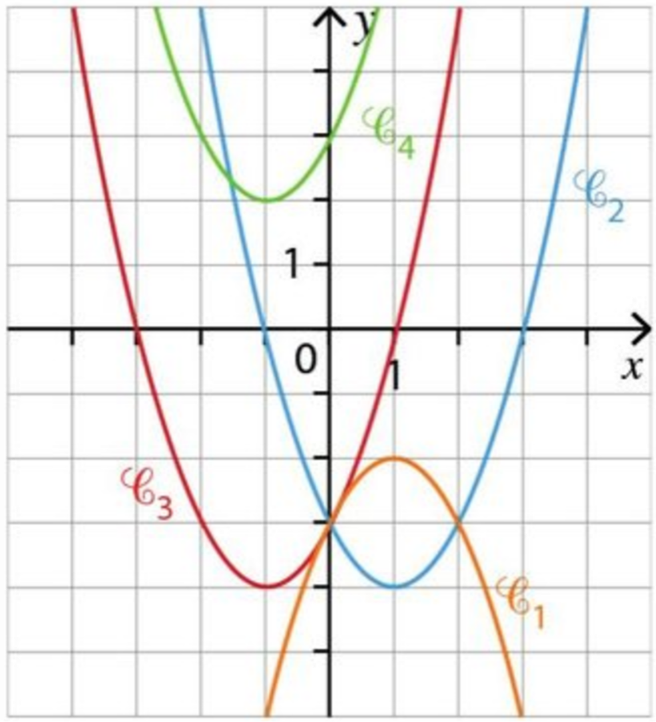
Donc $S = [-3;0[\cup[1;+\infty[$.

Exercice 5 *(1,5 points)* Pour les trois fonctions ci-dessous, déterminer la représentation graphique qui lui correspond en justifiant succinctement votre choix. (Il y a donc une représentation qui ne correspond à aucune de ces 3 fonctions)

a) $f(x) = x^2 + 2x + 3$
f est représenté par la courbe $\mathscr{C}_4$, puisque c'est la seule courbe qui passe par le point de coordonnées $(0, 3)$.

b) $g(x) = x^2 + 2x - 3$
Ici $g(1) = 0$ donc g est représentée par la courbe $\mathscr{C}_3$.

c) $h(x) = x^2 - 2x - 3$
Ici $h(-1) = 0$ donc h est représentée par la courbe $\mathscr{C}_2$.



Exercice 6 *(3 points)* On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par l'expression $g(x) = -x^2 + 2x - 3$. Déterminer les racines de g (si elles existent) la forme canonique, le tableau de variation et la forme factorisée.

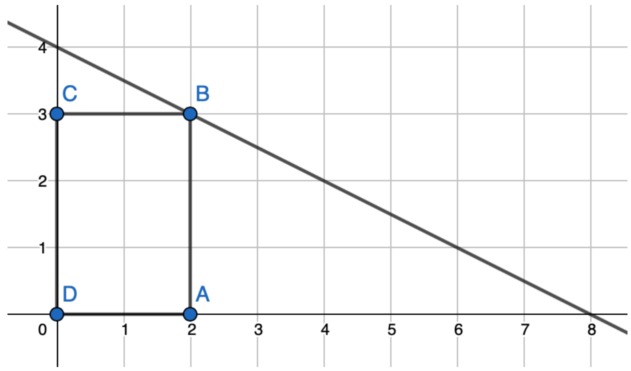
- $\Delta = 4 - 4 \times (-1) \times (-3) = -8 < 0$ donc pas de racine.
- $\alpha = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-2}{2 \times (-1)} = 1$ et $\beta = g(\alpha) = g(1) = -1^2 + 2 \times 1 - 3 = -2$ donc $g(x) = -(x-1) - 2$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g(x)$	$\nearrow$	-2	$\searrow$

- Il n'y a pas de racine donc pas de forme factorisée.

Exercice 7 *(4 points)* Sur le graphique ci-dessous, la droite d à pour équation $y = 4 - \frac{1}{2}x$ et les points A, B, C et D forment un rectangle avec :

- Le point A a pour coordonnées $(x, 0)$
- Le point B est sur la droite d
- Le point C est sur l'axe des ordonnées
- Le point D est l'origine



On remarque que la valeur de x varie sur $[0;8]$ et représente la longueur DA.
On note $S(x)$ la surface du rectangle $ABCD$.

1. Montrer que $S(x) = x\left(4 - \frac{1}{2}x\right)$.

On a $DA = x$ et $AB = y_b - y_A = 4 - \frac{1}{2}x - 0 = 4 - \frac{1}{2}x$. Donc :

$$S(x) = DA \times AB = x\left(4 - \frac{1}{2}x\right)$$

2. Déterminer la forme développée de la fonction S

$$S(x) = x\left(4 - \frac{1}{2}x\right) = 4x - \frac{1}{2}x^2$$

3. Déterminer le tableau de variation de la fonction S.
On a $\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2 \times \frac{-1}{2}} = 4$ et $f(\beta) = 8$. D'où le tableau :

x	0	4	8
$S(x)$	0 ↗	8	↘ 0

4. En déduire la position du point A (c'est-à-dire la valeur de x) pour que la surface du rectangle $ABCD$ soit maximale.
D'après le tableau de variation précédent, la surface est maximale pour $x = 4$ et elle vaut alors $\beta = 8$.