DS 1 : Correction récurrence.

Question de cours :

a) Démontrez par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 3^n \geqslant 1+2n$$

b) Soit $x \in [-1, +\infty[$. Démontrez par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (1+x)^n \geqslant 1+nx$$

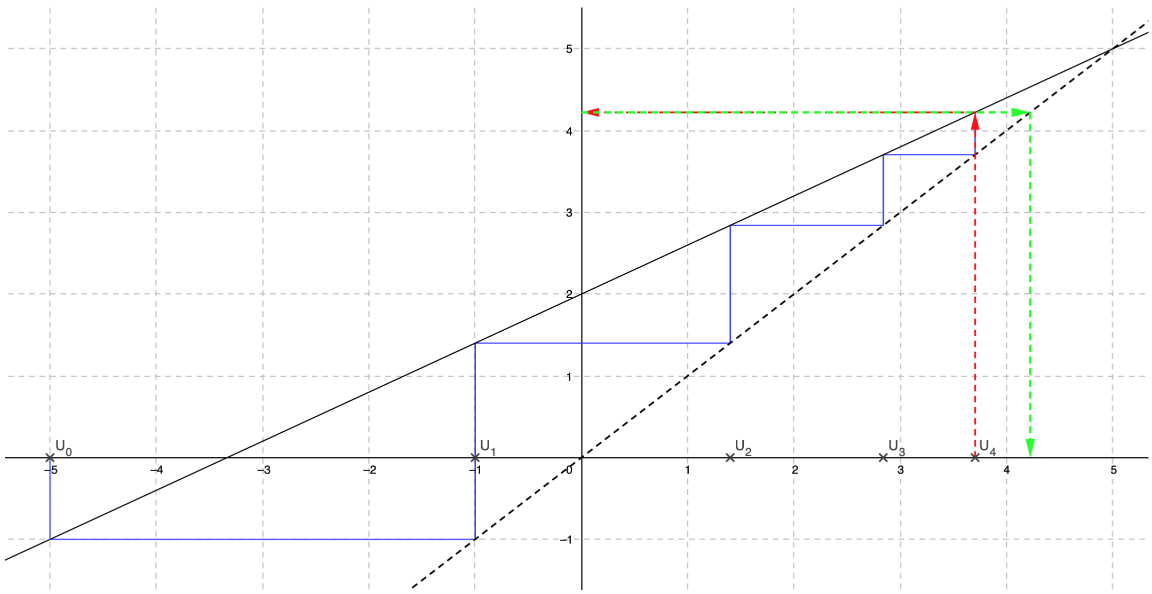
Exercice 1. On considère une suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = -5 \\ u_{n+1} = \frac{3}{5}u_n + 2 \end{cases}$$

On décide d'étudier le comportement de cette suite.

1. Étude graphique.

a. Représenter graphiquement les premiers termes de cette suite sur le graphique ci-dessous :



b. Quelle conjecture peut-on faire sur le comportement de cette suite ?
Il semble que cette suite soit croissante et elle semble converger vers 5.

2. Récurrence :

a. Montrer par récurrence :

$$P_n : \quad \forall n \in \mathbb{N}, -5 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 5$$

Initialisation : $u_1 = \dfrac{3}{5} \times (-5) + 2 = -1$. Donc $-5 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 5$. Donc P_0 est vrai.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que P_n vrai. Alors :

$$-5 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 5 \Leftrightarrow \frac{3}{5} \times (-5) \leqslant \frac{3}{5} \times u_n \leqslant \frac{3}{5}u_{n+1} \leqslant \frac{3}{5} \times 5 \Leftrightarrow -1 \leqslant \frac{3}{5} \times u_n + 2 \leqslant \frac{3}{5} \times u_{n+1} + 2 \leqslant 5 \Leftrightarrow -5 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 5$$

On a montré par récurrence que :

$$\forall n / in\mathbb{N},\ -5 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 5$$

b. Que peut-on en déduire ?
On peut donc en déduire que la suite (u_n) est **croissante** et **majorée** par 5.

3. Dans cette question, on étudie la suite (v_n) par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = 5 - u_n$$

a. Interpréter graphiquement les termes de cette suite.
Cette suite permet d'étudier la distance entre u_n et 5.

b. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{3}{5}$.

$$v_{n+1} = 5 - u_{n+1} = 5 - \left(\frac{3}{5}u_n + 2\right) = 3 - \frac{3}{5}u_n = 3 - \frac{3}{5}(5 - v_n) = 3 - 3 + \frac{3}{5}v_n = \frac{3}{5}v_n$$

On (v_n) est la suite géométrique de premier terme $v_0 = 5 - u_0 = 10$ et de raison $q = \frac{3}{5}$.

c. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, v_n en fonction de n. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

$$v_n = v_0 \times q^n = 10 \times \left(\frac{3}{5}\right)^n \qquad \text{donc} \qquad u_n = 5 - 10 \times \left(\frac{3}{5}\right)^n$$

4. On souhaite déterminer la valeur à partir de laquelle v_n est inférieur à 10^{-2}.

a. Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous :

```
N ← 0
U ← −5
V ← 10
Tant que V ⩾ 10^−2 faire
        U ← (3/5) u_n + 2
        V ← 5 − U
        N ← N + 1
Fin Tant que
Afficher N
```

b. A l'aide de la calculatrice déterminer la valeur affichée par l'algorithme précédent. La calculatrice affichera $N = 14$ (On observe que $u_{13} \simeq 4,9869$ et $u_{14} \simeq 4,9922$)

Exercice 2. Les Questions sont indépendantes :

1. Calculer la somme suivante, sachant que les termes de cette somme sont les termes d'une suite arithmétique. Ici le nombre de terme est : $\frac{17-(-73)}{3} + 1 = 31$

$$S = -73 - 70 - \ldots + 17 = \frac{-73+17}{2} \times 31 = 868$$

2. Déterminer l'entier n tel que :

$$4 + 5 + \ldots + n = 19104 = \frac{4+n}{2} \times \underbrace{(n-4+1)}_{\text{nb de termes}} = \frac{n^2+n-12}{2} \Leftrightarrow n^2 + n - 38220 = 0 \Leftrightarrow n^2 = 38223 \Leftrightarrow n = 195 \text{ ou } \underbrace{n = -196}_{\text{Impossible}}$$

3. On considère une suite arithmétique telle que $u_3 = 0$ et

$$S = \sum_{k=3}^{26} u_k = u_3 + u_4 + \ldots + u_{26} = \frac{0 + (26-3)r}{2} \times \underbrace{(26-3+1)}_{\text{nb de termes}} = 12 \times 23r == 276 \Leftrightarrow r = \frac{276}{12 \times 23} = 1$$

Déterminer la raison de cette suite.

Exercice 3. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$S_n = \frac{1}{2\times4} + \frac{1}{4\times6} + \ldots + \frac{1}{2n\times(2n+2)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k\times(2k+2)} = \frac{n}{4(n+1)}$$

On a formule de récurrence :

$$S_{n+1} = \frac{1}{2\times4} + \frac{1}{4\times6} + \ldots + \frac{1}{2n\times(2n+2)} + \frac{1}{2(n+1)\times(2(n+1)+2)} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{2k\times(2k+2)} = S_n + \frac{1}{4(n+1)\times(n+2)}$$

Initialisation : Pour $n = 1$.

$$S_1 = \frac{1}{2\times 4} = \frac{1}{8} \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{4(1+1)} = \frac{1}{8}$$

Donc P_1 est vrai.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons P_n, c'est-à-dire $S_n = \dfrac{n}{4(n+1)}$.

$$S_{n+1} = S_n + \frac{1}{4(n+1)\times(n+2)} = \frac{n}{4(n+1)} + \frac{1}{4(n+1)\times(n+2)} = \frac{n\times(n+2)+1}{4(n+1)\times(n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{4(n+1)\times(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{4(n+1)\times(n+2)} = \frac{n+1}{4\times(n+2)}$$

On a montrer par récurrence que :

$$\forall x \in \mathbb{N}^*, \S_n = \frac{n}{4(n+1)}$$

Exercice 4. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + n - 2$.

On souhaite démontrer que l'expression des termes de la suite (u_n) en fonction de n pour n entier naturel, est donnée par :

$$u_n = \frac{(n-1)(n-4)}{2}$$

Pour cela nous utiliserons deux méthodes.

1. Démontrer cette formule par récurrence.

   Initialisation : Pour $n = 0$.

   $$u_0 = 2 \qquad \text{et} \qquad \frac{(0-1)(0-4)}{2} = 2$$

   Donc P_0 est vrai.

   Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons P_n, c'est-à-dire $u_n = \dfrac{(n-1)(n-4)}{2}$.

   $$u_{n+1} = u_n + n - 2 = \frac{(n-1)(n-4)}{2} + n - 2 = \frac{n^2-5n+4+2n-4}{2} = \frac{n(n-3)}{2}$$

   On a montrer par récurrence que :

   $$\forall x \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{(n-1)(n-4)}{2}$$

2. Dans cette question, l'on considère la suite auxiliaire (v_n) telle que, pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, $v_n = u_{n+1} - u_n$.

   a. Montrer que la suite (v_n) est arithmétique.

   $$v_n = u_{n+1} - u_n = n - 2$$

   Donc (v_n) est une suite arithmétique de premier terme $v_0 = -2$ et de raison 1.

   b. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la somme $S_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_{n-1}$.
   Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'on a :

   $$S_n = u_1 - u_0 + u_2 - u_1 + u_3 - u_2 + \ldots + u_{n-1} - u_{n_2} + u_n - u_{n_1} = u_n - u_0$$

   c. Calculer cette somme d'une autre manière.
   On utilise la formule de la somme des termes d'une suite arithmétique. On obtient :

   $$S_n = \frac{v_0 + v_{n-1}}{2} \times n = \frac{-2+n-3}{2} n = \frac{n^2-5n}{2}$$

   d. Comparer les deux expressions obtenues et conclure. Donc :

   $$u_n - u_0 = \frac{n^2-5n}{2} \Rightarrow u_n = \frac{n^2-5n}{2} + 2 = \frac{n^2-5n+4}{2} = \frac{(n-1)(n-4)}{2}$$

Exercice 5. Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n^2}$.

1. Déterminer la valeur de u_1. On a $u_1 = \sqrt{2+u_0^2} = \sqrt{3} \simeq 1,71$.

2. Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1}$$

Initialisation : Pour $n = 0$.

$$u_0 = 1 \leqslant u_1 = \sqrt{3}$$

Donc P_0 est vrai.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons P_n, c'est-à-dire $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1}$.

$$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \Leftrightarrow 0 \leqslant u_n^2 \leqslant u_{n+1}^2 \Leftrightarrow 2 \leqslant 2 + u_n^2 \leqslant 0 \leqslant + u_{n+1}^2 \Leftrightarrow \sqrt{2} \leqslant \sqrt{2 + u_n^2} \leqslant \sqrt{2 + u_{n+1}^2} \Leftrightarrow 0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2}$$

On a montrer par récurrence que :

$$\forall x \in \mathbb{N}, 0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1}$$

3. Que peut-on en déduire ?
La suite (u_n) est donc croissante.

4. Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \sqrt{2n+1}$$

Initialisation : Pour $n = 0$.

$$u_0 = 1 \leqslant \sqrt{2 \times 0 + 1} = 1$$

Donc P_0 est vrai.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons P_n, c'est-à-dire $u_n = \sqrt{2n+1}$.

$$u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n^2} = \sqrt{2 + 2n + 1} = \sqrt{2(n+1) + 1}$$

On a montrer par récurrence que :

$$\forall x \in \mathbb{N}, u_n = \sqrt{2n+1}$$