DS 1 : Second degré.

Question de cours : (1 point) A partir de la forme canonique du trinôme $f(x) = ax^2 + bx + c$ (où a, b et c sont trois réels) ci-dessous déterminer la forme factoriser. On suppose ici que $\Delta = b^2 - 4ac > 0$.

$$\begin{aligned} f(x) = ax^2 + bx + c &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right) \\ &= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right) = a\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) \\ &= a\left(x - \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x - \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right) \end{aligned}$$

Exercice 1 *On considère le trinôme $f(x) = -x^2 - 12x + 64$.*

1. *Déterminer la forme canonique de f.*
2. *Déterminer la forme factorisée de f.*

Solution :
$f(x) = -x^2 - 12x + 64 = -1(x^2 + 12x - 64) = -\left[(x+6)^2 - 36 - 64\right] = 100 - (x+6)^2 = 10^2 - (x+6)^2 = (10 - (x+6))(10 + x + 6) = -(x-4)(x+16)$.

Exercice 2

1. *Déterminer une fonction f, représentée par la parabole de sommet $S(2,1)$ et passant par le point $A(4,-3)$. On peut en déduire puisque S est le sommet que $\alpha = 2$ et $\beta = 1$ d'où la forme canonique :*

$$f(x) = a(x-2)^2 + 1$$

Par ailleurs, comme A est sur la représentation graphique. Donc $f(4) = -3$, ce qui ce traduit par :

$$f(1) = a(4-2)^2 + 1 = 4a + 1 = -3 \Leftrightarrow a = \frac{-4}{4} = -1$$

D'où la forme canonique :

$$f(x) = -(x-2)^2 + 1$$

2. *On considère la fonction $f(x) = -x^2 + 4x - 3$.*

   a. *Déterminer les racines de f.*
   Le discriminant est :

$$\Delta = 4^2 - 4 \times (-1) \times (-3) = 4$$

   Donc f possède deux racines :

$$x_1 = \frac{-4-2}{2 \times (-1)} = 3 \quad et \quad x_1 = \frac{-4+2}{2 \times (-1)} = 1$$

   b. *Déterminer le tableaux de signe de f.*

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

   c. *Résoudre $f(x) > 0$.*
   D'après le tableau précédent, on obtient : $S =]1;3[$.

   d. *Déterminer le tableau de variation de f.*

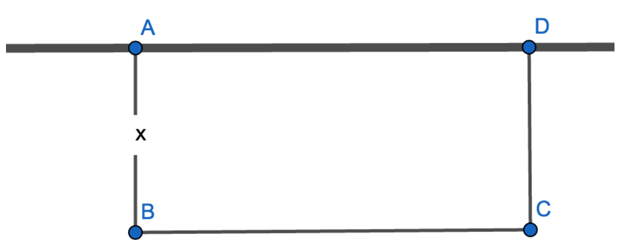
x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	1	$\searrow$	

Exercice 3 *Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -7x^3 + 6x^2 - 2x + 3$.*

1. *Déterminer la valeur de* $f(1)$.
$$f(1) = -7+6-2+3 = 0$$
Donc 1 est racine de f.
2. *Déterminer la fonction polynôme* g *de degré 2 telle que :*
$$f(x) = (x-1)g(x)$$
$$f(x) = -7x^3+6x^2-2x+3 = (x-1)(-7x^2-x-3)$$
On remarque que $f(1) = 0$ *(c'est-à-dire que* 1 *est racine). On peut alors factoriser* f *sous la forme :*
$$f(x) = (x-1)(ax^2+bx+c)$$
Si l'on développe, on obtient :
$$f(x) = ax^3+bx^2+cx-ax^2-bx-2 = ax^3+(b-a)x^2+(c-b)x-c = -7x^3+6x^2-2x+3$$
Par identification, on obtient le système :
$$\begin{cases} a=-7 \\ b-a=6 \\ c-b=-2 \\ -c=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-7 \\ b=-1 \\ c=-3 \end{cases}$$
3. *On veut résoudre* $f(x) = 0$.
   a. *Déterminer les racines de* g.
   On détermine $\Delta = 1-4\times(-7)\times(-3) = -83 < 0$. *Donc* g *n'a pas de racine.*
   b. *En déduire les solutions de* $f(x) = 0$.
$$f(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1) = 0 \quad ou \quad g(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Exercice 4 *On considère une parabole* $\mathscr{P}$ *d'équation :*
$$\mathscr{P} : y = x^2-4x+1$$
Ainsi que la droite $\mathscr{D}$ *d'équation :*
$$y = -4x+t$$
Pour quelle valeur de t *la droite* $\mathscr{D}$ *est-elle tangente à la parabole* $\mathscr{P}$ *?*
On cherche à détermine les points d'intersection de $\mathscr{P}$ *et* $\mathscr{D}$ *:*
$$x^2-4x+1 = -4x+t \Leftrightarrow x^2+1-t = 0$$
Pour que $\mathscr{D}\cap\mathscr{P}$ *soit réduit à un point il faut que* $\Delta = 0 = 0^2-4\times1\times(1-t) = -4(1-t) \Leftrightarrow t = 1$.

Exercice 5 **(3,5 points)** *Un agriculteur souhaite faire un enclos rectangulaire le long d'un mur avec un fil électrifié de 100m. On modélise cet enclos sur la figure ci-dessous. Le coté [AD] est le côté "mur" (donc sur ce côté inutile de mettre du fil électrifié). Les 3 autres côtés sont constitués du fil électrifié. On note x la longueur du côté [AB].*



On note $A(x)$ *la surface de l'enclos.*

1. *Déterminez l'intervalle dans lequel x varie.*
$x \in [0;50]$ *en effet au maximum AB=CD=50 et alors BC=0.*

2. *Déterminez la surface maximale de l'enclos et la valeur de x pour laquelle elle est atteinte.*
Le calcul de $A(x)$ donne : $A(x) = AB \times BC = x \times (100-2x) = -2x^2+100x$. On obtient un polynôme du second degré dont le coefficient a de x^2 est négatif donc ce polynôme admet sur $\mathbb{R}$ un maximum en $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-100}{-2\times 2} = 25$. Cette valeur est bien dans l'ensemble de définition de A donné en 1) et donc la surface maximale de l'enclos vaut $A(25) = 25 \times 50 = 1250m^2$.

Exercice 6 *Trouver deux nombres u et v, avec $u < v$, dont la somme vaut $\frac{1}{2}$ et dont le produit vaut -3.*

Solution : $u = \frac{-3}{2}$ et $v = 2$

$1^{ière}$ ***étape :*** *On détermine le système :*

$$\begin{cases} v + u = \frac{1}{2} \\ uv = -3 \end{cases}$$

$2^{ième}$ ***étape :*** *On utilise la substitution pour se "ramener à une seule équation" :*

$$\begin{cases} v + u = \frac{1}{2} \\ uv = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = \frac{1}{2} - u \\ u\left(\frac{1}{2} - u\right) = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = \frac{1}{2} - u \\ u^2 - \frac{1}{2}u - 3 = 0 \end{cases}$$

$3^{ième}$ ***étape :*** *On résout l'équation du second degré. On calcul $\Delta = \left(\frac{-1}{2}\right)^2 - 4 \times 1 \times (-3) = \frac{49}{4} > 0$. Il y a donc deux racines :*

$$u = \frac{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{49}{4}}}{2 \times 1} = \frac{-3}{2} \quad \textit{et alors} \quad v = \frac{1}{2} - \frac{-3}{2} = 2$$

ou

$$u = \frac{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{49}{4}}}{2 \times 1} = 2 \quad \textit{et alors} \quad v = \frac{1}{2} - 2 = \frac{-3}{2}$$

Comme $u < v$ alors la solution est $(u,v) = \left(\frac{-3}{2};2\right)$

Exercice 7 *Un triangle rectangle a une hypoténuse de longueur $5cm$ et une aire de $6cm^2$.*
Déterminez la longueur des deux côtés petits côtés de ce triangles.
$1^{ière}$ ***étape :*** *On détermine le système vérifié par u et v (un utilisant la formule donnant l'air d'un triangle et le théorème de Pythagore :*

$$\begin{cases} \frac{uv}{2} = 6 \\ u^2 + v^2 = 5^2 \end{cases}$$

$2^{ième}$ ***étape :*** *On utilise la substitution pour se "ramener à une seule équation" :*

$$\begin{cases} u = \frac{12}{v} \\ \left(\frac{12}{v}\right)^2 + v^2 = 5^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{12}{v} \\ \left(\frac{12^2 + v^4}{v^2}\right) = 5^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{12}{v} \\ \left(12^2 + v^4\right) = 5^2 v^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{12}{v} \\ v^4 - 25v^2 + 144 = 0 \end{cases}$$

$3^{ième}$ ***étape :*** *On fait le changement de variable $V = v^2$, pour pouvoir obtenir une équation du second degré.*

$$V^2 - 25V + 144 = 0$$

$4^{ième}$ ***étape :*** *On résout l'équation du second degré. On calcul $\Delta = (-25)^2 - 4 \times 1 \times 144 = 49 = 7^2 > 0$. Il y a donc deux racines :*

$$V_1 = \frac{25-7}{2 \times 1} = 9 = 3^2 \quad \textit{ou} \quad V_1 = \frac{25+7}{2 \times 1} = 16 = 4^2$$

$4^{ième}$ ***étape :*** *On a donc deux solution pour $v = \sqrt{9} = 3$ et alors $u = \frac{12}{3} = 4$ ou $v = \sqrt{16} = 4$ et alors $u = \frac{12}{4} = 3$. Le petit côté est donc 3 et le grand 4.*