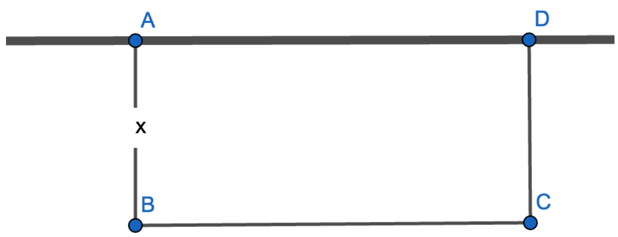
Correction DS 1 : polynôme du second degré

Exercice 1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'inégalité $-4x^2 + 12x - 9 \geqslant 0$. $\Delta = 144 - 144 = 0$.
Le polynôme à une racine double $x_0 = \frac{-12}{2\times(-4)} = \frac{3}{2}$ donc le polynôme est du signe de a, donc négatif ou nul.
Donc $S = \left\{\frac{3}{2}\right\}$.

Exercice 2. Un agriculteur souhaite faire un enclos rectangulaire le long d'un mur avec un fil électrifié de 100m. On modélise cet enclos sur la figure ci-dessous. Le coté [AD] est le côté "mur" (donc sur ce côté inutile de mettre du fil électrifié). Les 3 autres côtés sont constitués du fil électrifié. On note x la longueur du côté [AB].



On note $A(x)$ la surface de l'enclos.

1. Déterminez l'intervalle dans lequel x varie.
   $x \in [0; 50]$ *en effet au maximum AB=CD=50 et alors BC=0.*
2. Déterminez la surface maximale de l'enclos et la valeur de x pour laquelle elle est atteinte.
   Le calcul de $A(x)$ donne : $A(x) = AB \times BC = x \times (100 - 2x) = -2x^2 + 100x$. On obtient un polynôme du second degré dont le coefficient a de x^2 est négatif donc ce polynôme admet sur $\mathbb{R}$ un maximum en $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-100}{-2\times 2} = 25$. Cette valeur est bien dans l'ensemble de définition de A donné en 1) et donc la surface maximale de l'enclos vaut $A(25) = 25 \times 50 = 1250m^2$.

Exercice 3. Déterminez les coordonnées du ou des points d'intersection de la droite d et de la parabole P d'équations respectives :

$$y = 4x + 12 \quad et \quad y = -x^2 - 5x + 4$$

$M(x, y) \in d \cap P \Rightarrow \begin{cases} 4x + 12 = -x^2 - 5x + 4 \\ y = 4x + 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 9x + 8 = 0 \\ y = 4x + 12 \end{cases}$
On cherche donc les racines du polynôme $x^2 + 9x + 8$, $\Delta = 81 - 32 = 49 = 7^2 > 0$ donc on a deux racines $x_1 = \frac{-9-7}{2} = -8$ et $x_2 = \frac{-9+7}{2} = -1$. Pour les cordonnées des points d'abscisse x_1 et x_2 il est plus simple d'utiliser l'équation de d. Pour $x_1 = -8$ on a $y_1 = 4 \times (-8) + 12 = -20$ et pour $x_2 = -1$ on obtient $y_2 = 4 \times (-1) + 12 = 8$ donc d et P ont deux points d'intersection dont les coordonnées sont respectivement $(-8; -20)$ et $(-1; 8)$.

Exercice 4. Résoudre les inégalités suivantes :

1. $\frac{-x^2+4x-3}{x^2-4x+4} \geqslant 0$.
   On commence par déterminer les signes du numérateur et du dénominateur pour faire le tableau de signes.

   - Pour $-x^2 + 4x - 3$ on a une racine évidente $x_1 = 1$ comme $x_1 \times x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-3}{-1} = 3$ alors $x_2 = 3$.
   - Pour $x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2 \geqslant 0$ on a une racine double qui est 2.

   On obtient le tableau de signes suivant en utilisant le fait que lorsque qu'un polynôme du second degré à deux racines distinct, il est du signe du coefficient a à l'extérieur des racines :

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$-x^2 + 4x - 3$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$x^2 - 4x + 4$		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
$\frac{-x^2+4x-3}{x^2-4x+4}$		$-$	0	$+$	$\|$	$+$	0	$-$	

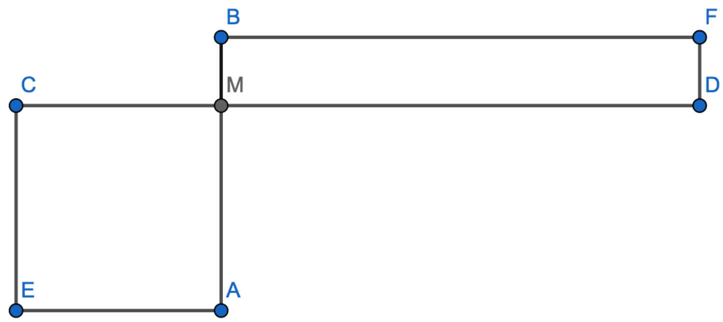
   Donc la solution de l'inéquation de départ est $S = [1; 2[\cup]2; 3]$.

2. $\frac{x^2-1}{x^2+2x+3} > 3 \Leftrightarrow \frac{x^2-1}{x^2+2x+3} - 3 > 0 \Leftrightarrow \frac{-2x^2-6x-10}{x^2+2x+3} > 0$.
   On commence par déterminer les signes du numérateur et du dénominateur

   - Pour $-2x^2 - 6x - 10$ on a $\delta = -44 < 0$. Donc ce numérateur est strictement négatif (puisque $a = -2 < 0$).
   - Pour $x^2 + 2x + 3$ on a $\delta = -8 < 0$.Donc ce numérateur est strictement positif. (Puisque $a = 1 > 0$)

   Donc le quotient est toujours strictement négatif, donc $S = \varnothing$

Exercice 5. Soit L un réel strictement positif. Soit A et B deux points du plan tels que $AB = L$ et soit M un point de $[AB]$ tel que $MB = x$ où x est un réel vérifiant $0 < x < L$. Soit C et D deux points du plan tels que $CM = 2x$, $CD = 3L$ et tels que la droite (CD) passe par M et soit perpendiculaire à (AB). Soit E un point du plan tel que $AMCE$ soit un rectangle et soit F un point du plan tel que $DFBM$ soit un rectangle.



1. On note $A(x)$ la somme des aires des rectangles $AMCE$ et $DFBM$. Déterminer x en fonction de L pour que l'aire soit maximale. Déterminer alors cette aire maximale en fonction de L.
   On a $AM = L - x$ et $CM = 2x$. Donc l'aire de AMCE vaut $AM \times CM = 2x(L - x)$.
   On a $MB = x$ et $MD = CD - CM = 3L - 2x$. Donc l'aire de DFBM vaut $MB \times MD = x(3L - 2x)$.
   Donc $A(x) = 2x(L - x) + x(3L - 2x) = -4x^2 + 5Lx$. L'aire est maximale si $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-5L}{-8} = \frac{5L}{8}$ et vaut alors $A\left(\frac{5L}{8}\right) = -4 \times \frac{25L^2}{64} + \frac{25L^2}{8} = \frac{25L^2}{16}$
2. On note $T(x)$ l'aire du triangle ADM . Existe-t-il un réel x vérifiant $A(x) = 2T(x)$? Si oui, donner son expression en fonction de L.
   On a $T(x) = \frac{MD \times AM}{2} = \frac{1}{2}(L - x)(3L - 2x)$. Donc :
   $A(x) = 2T(x) \Leftrightarrow -4x^2 + 5Lx = (L - x)(3L - 2x) = 2x^2 - 5Lx + 3L^2 \Leftrightarrow 0 = 6x^2 - 10Lx + 3L^2$.
   On calcul $\Delta = 100L^2 - 4 \times 6 \times 3L^2 = 28L^2 = 2^2 \times 7L^2 > 0$.
   On a donc deux racines : $x_1 = \frac{10L-2L\sqrt{7}}{12} = \frac{5L-L\sqrt{7}}{6} = \frac{5-\sqrt{7}}{6}L$ et $x_2 = \frac{10L+2L\sqrt{7}}{12} = \frac{5+\sqrt{7}}{6}L$. Or comme $0 < x < L$, et $\frac{5-\sqrt{7}}{6} \in [0; 1]$ et $\frac{5+\sqrt{7}}{6} > 1$ on a $0 < x_1 < L$ et $x_2 > L$ donc on a qu'une solution qui est x_1.

Exercice 6. On considère le polynôme $P(x) = x^3 - 4x^2 - 11x + 30$.

1. Déterminer a,b et c tel $P(x) = (x - 2)(ax^2 + bx + c)$.

$$
\begin{array}{rrrrrrr|l}
X^3 & - & 4X^2 & - & 11X & + & 30 & X-2 \\
\cline{8-8}
X^3 & - & 2X^2 & & & & & X^2-2X-15 \\
\cline{1-3}
 & & -2X^2 & - & 11X & + & 30 & \\
 & & -2X^2 & + & 4X & & & \\
\cline{3-5}
 & & & & -15X & + & 30 & \\
 & & & & -15X & + & 30 & \\
\cline{5-7}
 & & & & & & 0 & \\
\end{array}
$$

   Donc $P(x) = (x - 2)(x^2 - 2x - 15)$. (Donc $a = 1$, $b = -2$ et $c = -15$.)
2. En déduire les racines du polynôme P.
   Pour $x^2 - 2x - 15$ on a $\Delta = 4 + 60 = 64 = 8^2$ donc $x_1 = \frac{2-8}{2} = -3$ et $x_2 = \frac{2+8}{2} = 5$. Donc :
   $P(x) = (x - 2)(x^2 - 2x - 15) = 0 \Leftrightarrow x - 2 = 0 ou x^2 - 2x - 15 = 0 \Leftrightarrow x \in \{-3; 2; 5\}$
3. Déterminer le signe du polynôme P.

x	$-\infty$		-3		2		5		$+\infty$
$x - 2$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x^2 - 2x - 15$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	