DS 1 : Second degré.

Question de cours : (2 point) On considère une fonction polynomial f donnée par l'expression $f(x) = ax^2 + bx + c$ (où a, b et c sont trois réels)
On pose $\alpha = \dfrac{-b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$.

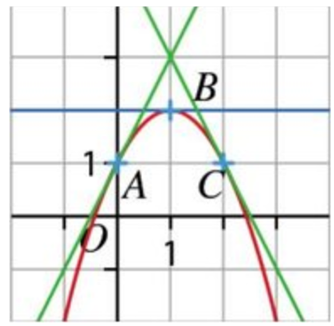
a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$.

b) *(Bonus : 2 points)* On suppose dans cette question que $\Delta = b^2 - 4ac > 0$. Par ailleurs on admet que :

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right)$$

Trouvez la forme factorisée de f.

Exercice 1 *(2 points)* Ci-contre, nous avons la représentation graphique d'une fonction f et de trois de ses tangentes tracées aux points A, B et C d'abscisses respectives 0, 1 et 2.



Déterminer graphiquement les valeurs de $f(0)$, $f'(0)$, $f(1)$, $f'(1)$, $f(2)$ et $f'(2)$.

Déterminer l'équation de la tangente en A (Vous pourrez vous contenter d'une lecture graphique de l'ordonnée à l'origine)

Exercice 2 *(3 points)*

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x^2$$

On note $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique.

   a. Montrer que f est dérivable en 1 et déterminer le nombre dérivé $f'(1)$. (Rappel : qu'il faut déterminer le taux d'accroissement en 1, puis sa limite. Si cette limite existe, la fonction est dérivable et le nombre dérivée est cette limite)

   b. Déterminer l'équation de la tangente en 1 à $\mathscr{C}_f$.

2. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = 1 + \frac{3}{x}$$

Montrer que g est dérivable en 5 et donner la valeur de $g'(5)$.

Exercice 3 *(2,5 points)*
Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x^3 + 6x^2 + 25x - 82$.

1. Déterminer la valeur de $h(2)$.
2. Déterminer des réels a, b et c de sorte que : $\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = (x-2)(ax^2 + bx + c)$
3. Déterminer le nombre de solution de $h(x) = 0$.

Exercice 4 *(4 points)* Résoudre les inéquations suivantes :

a) $-x^2 + 7x \leqslant 2x - 6$

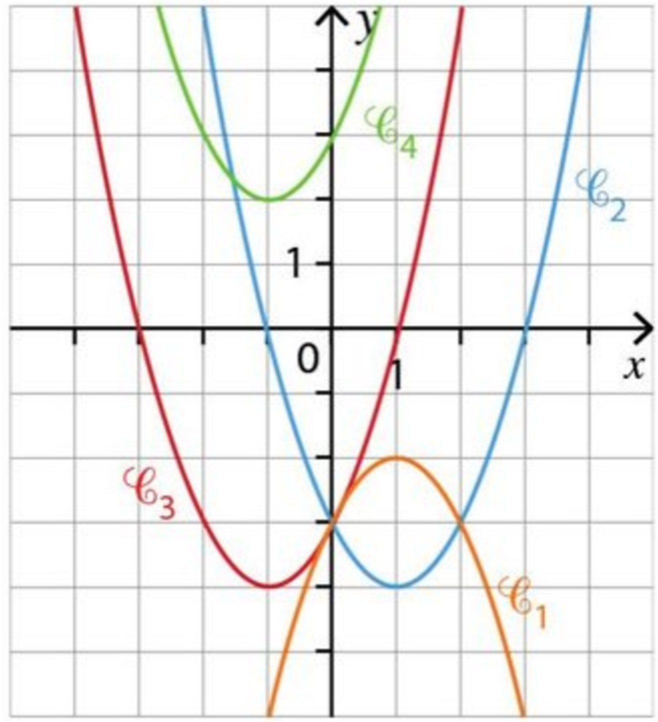
b) $\dfrac{3}{x} \leqslant x + 2$

Exercice 5 *(1,5 points)* Pour les trois fonctions ci-dessous, déterminer la représentation graphique qui lui correspond en justifiant succinctement votre choix. (Il y a donc une représentation qui ne correspond à aucune de ces 3 fonctions)

a) $f(x) = x^2 + 2x + 3$

b) $g(x) = -x^2 + 2x - 3$

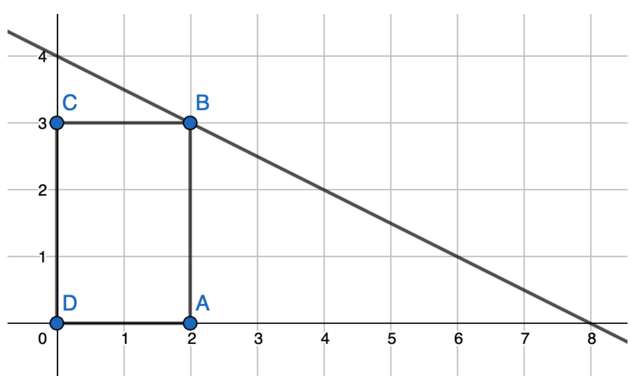
c) $h(x) = x^2 - 2x - 3$



Exercice 6 *(3 points)* On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par l'expression $g(x) = -x^2+2x-3$. Déterminer les racines de g (si elles existent) la forme canonique, le tableau de variation et la forme factorisée.

Exercice 7 *(4 points)* Sur le graphique ci-dessous, la droite d à pour équation $y = 4-\frac{1}{2}x$ et les points A, B, C et D forment un rectangle avec :

- Le point A a pour coordonnées $(x, 0)$
- Le point B est sur la droite d
- Le point C est sur l'axe des ordonnées
- Le point D est l'origine



On remarque que la valeur de x varie sur $[0;8]$ et représente la longueur DA.
On note $S(x)$ la surface du rectangle $ABCD$.

1. Montrer que $S(x) = x\left(4-\frac{1}{2}x\right)$.
2. Déterminer la forme développée de la fonction S
3. Déterminer le tableau de variation de la fonction S.
4. En déduire la position du point A (c'est-à-dire la valeur de x) pour que la surface du rectangle $ABCD$ soit maximale puis déterminer cette valeur maximale.