DS : limite de suite et exponentiel.

Exercice 1. **(5 points)** Déterminer les limites des suites suivantes :

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} -n^2+3n-1$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-4n^2+3n-1}{1-n^2}$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^3+3n-1}{1-n^5}$

d) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-2n^3+3n-1}{1-n^2}$

e) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n^2+n}-n$

Exercice 2. **(3 points)** On souhaite déterminer la limite de la suite (u_n) définie par :

$$u_n = \frac{\sqrt{n^2+n+2}}{\sqrt{n^2-n-1}}$$

a) Montrer que : $u_n = \dfrac{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{n}}}{\sqrt{1-\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n^2}}}$

b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

Exercice 3. **(3 points)** Soit, pour tout entier n, $u_n = \dfrac{\cos(n)}{n+1}$.

Montrer que pour tout entier n, $-\dfrac{1}{n+1} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$, puis en déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 4. **(6 points)**

Un pays compte 300 loups en 2017. On estime que la population des loups croit naturellement au rythme de 12 % par an. Pour réguler la population des loups, le gouvernement autorise les chasseurs à tuer un quota de 18 loups par an.

On modélise la population par une suite (u_n), le terme u_n représentant le nombre de loups de ce pays en $2017+n$.

1. **a.** Avec ce modèle. vérifier que le nombre de loups de ce pays en 2018 sera de 318.

b. Justifier que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_{n+1} = 1{,}12u_n - 18$.

2. **a.** Recopier et compléter l'algorithme suivant pour qu'il détermine au bout de combien d'années la population de loups aura doublé.

```
N ← 0
U ← 300
Tant que ... faire
        U ← , ...
        N ← ...
Fin Tant que
```

b. A l'aide de la machine à calculer, déterminez l'année où la population de loup aura doublé.

3. On définit la suite (v_n) par : $v_n = u_n - 150$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 1,12. Préciser son terme initial.

b. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, v_n en fonction de n. En déduire que l'expression de u_n en fonction de n est :

$$u_n = 150 + 150 \times 1{,}12^n$$

c. Quelle est la limite de la suite (u_n) ? Justifier. Que peut-on en déduire ?

4. (Bonus) En 2023. avec ce modèle, la population de loups est estimée à 446 loups et le rythme de croissance annuel de la population reste identique. Dans ce cas, une nouvelle décision sera prise par le gouvernement : afin de gérer le nombre de loups dans le pays, il autorisera les chasseurs à tuer un quota de 35 loups par an.

En quelle année la population de loups dépassera-t-elle 600 loups ?

Toute trace de recherche sera valorisée dans cette question.

Exercice 5. **(6 points)** Les Questions sont indépendantes :

1. Calculer la somme suivante, sachant que les termes de cette somme sont les termes d'une suite arithmétique.

$$S = -73 - 70 - \ldots + 17$$

2. On considère une suite arithmétique telle que $v_8 = 20$ et $v_{12} = 28$. Déterminer la raison de cette suite.
3. Déterminer $\left(\frac{3}{4}\right)^3 + \left(\frac{3}{4}\right)^4 + \ldots + \left(\frac{3}{4}\right)^{10}$.
4. On considère la suite (S_n) définie par $S_n = 0{,}8 + 0{,}8^2 + \ldots + 0{,}8^n$ pour tout entier naturel n non nul. L'expression de S_n en fonction de n est $S_n = 0{,}8 \times \dfrac{1 - 0{,}8^n}{1 - 0{,}8}$.
   a. Calculer S_4.
   b. Déterminer les valeurs de a et b de sorte que : $S_n = a + b \times 0{,}8^n$.
   c. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.

Exercice 6. **(4 points) Dans cet exercice aucune démonstration n'est demandée.**

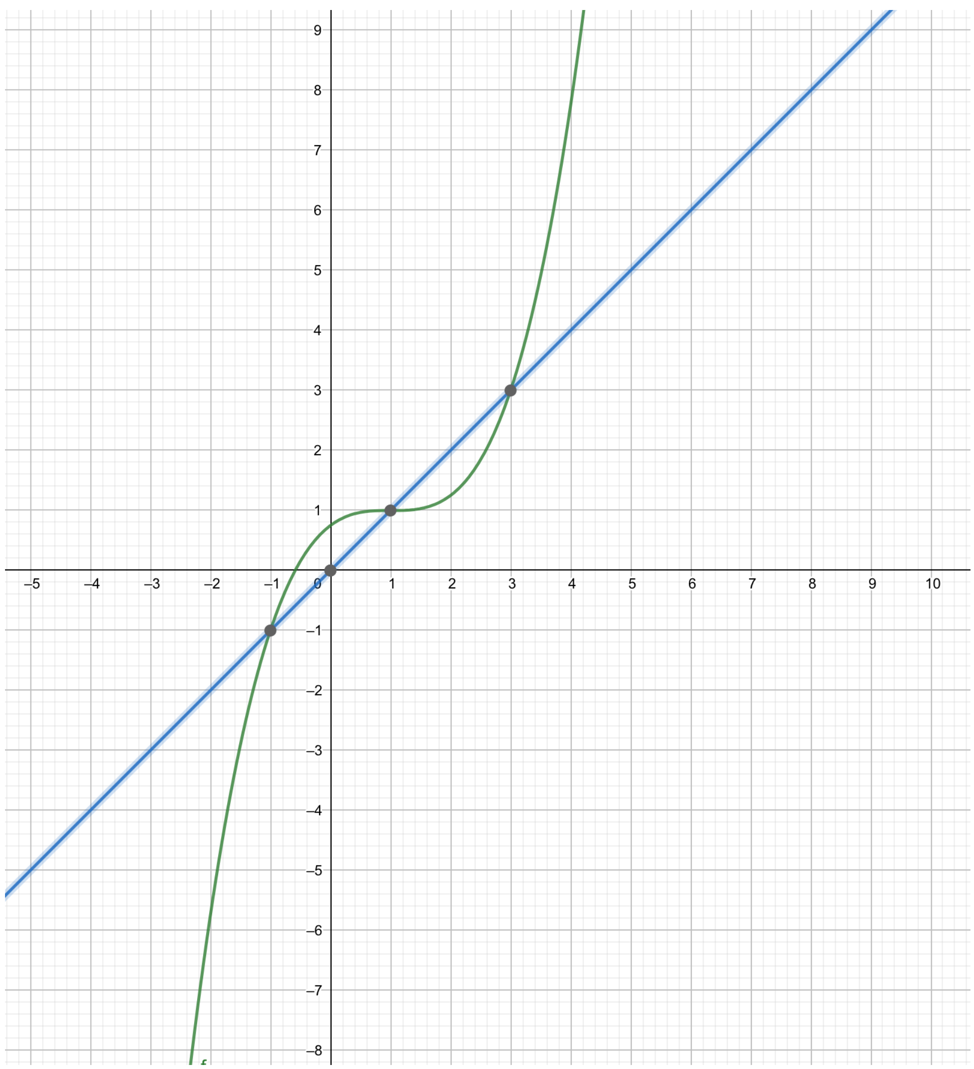
On définie la suite (u_n) par :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{(x-1)^3}{4} + 1$$

En vous appuyant sur le graphique ci-dessous (représentant la fonction f et la droite d'équation $y = x$) discuter du comportement de la suite u_n en fonction des valeurs de u_0. Vous ferez apparaitre les traits de construction justifiant vos **conjecture** sur le graphique ci-dessous :



Exercice 7. **(Question de cours) (3 points)**

On considère une fonction exp définie sur $\mathbb{R}$ et vérifiant : $\exp(0) = 1$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ \exp'(x) = \exp(x)$

Soit $y \in \mathbb{R}$. On définie la fonction k sur $\mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}, k(x) = \dfrac{\exp(x+y)}{\exp(x)}$

1. Déterminer l'expression de $k'(x)$.
2. En déduire que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, k(x) = exp(y)$$
3. En déduire que :
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$$

Exercice 8. **(4 points)** Résoudre les équation est inéquation suivantes :

a) $e^{x^2} = e^{-2x+3}$ b) $e^{x^2} > e^{-2x+3}$ c) $e^{2x} + 2e^x - 3 = 0$ d) $e^{2x} + 2e^x - 3 > 0$

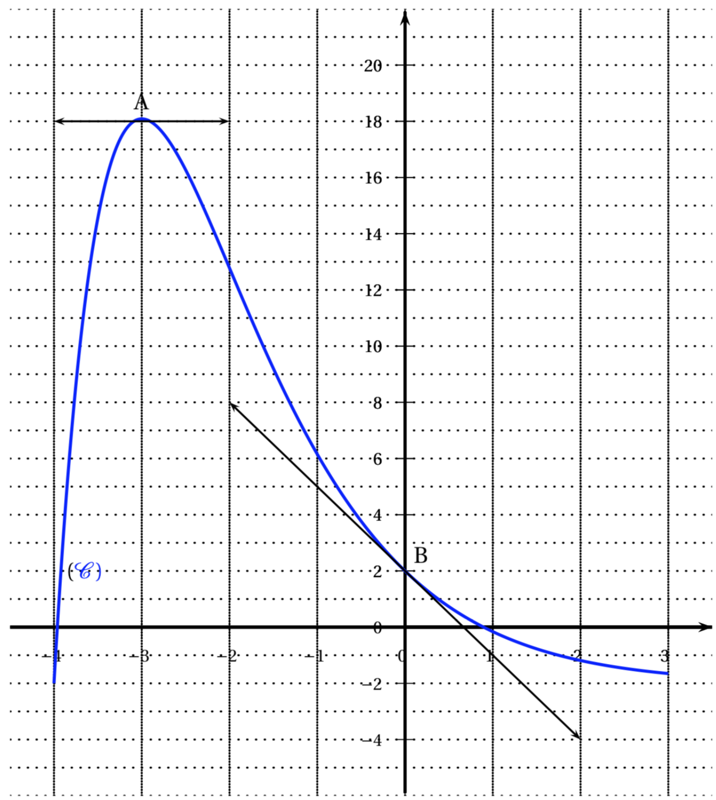
Exercice 9. **(3 points)** Prouver, que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

a) $\dfrac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}} = \dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$ b) $e^{-x} - e^{-2x} = \dfrac{e^x - 1}{e^{2x}}$ c) $(e^x + e^{-x})^2 - 2 = \dfrac{e^{4x}+1}{e^{2x}}$

Exercice 10. **(6 points)** La courbe $(\mathscr{C})$ ci-dessous représente dans un repére orthogonal une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-4\ ;\ 3]$. Les points A d'abscisse -3 et $B(0;2)$ sont sur la courbe $(\mathscr{C})$.

Sont aussi représentées sur ce graphique les tangentes à la courbe $(\mathscr{C})$ respectivement aux points A et B, la tangente au point A étant horizontale. On note f' la fonction dérivée de f.

Les parties A et B sont indépendantes



PARTIE A

1. Par lecture graphique, déterminer :
   a. $f'(-3)$;
   b. $f(0)$ et $f'(0)$.
2. La fonction f est définie sur $[-4;3]$ par
$$f(x) = a + (x+b)e^{-x}$$
où a et b sont deux réels que l'on va déterminer dans cette partie.
   a. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x de $[-4;3]$.
   b. Á l'aide des questions 1. b. et 2. a., montrer que les nombres a et b vérifient le système suivant :
$$\begin{cases} a+b &= 2 \\ 1-b &= -3 \end{cases}$$
   c. Déterminer alors les valeurs des nombres a et b.

PARTIE B

On admet que la fonction f est définie sur $[-4\ ;\ 3]$ par $f(x) = -2 + (x+4)e^{-x}$.

1. Justifier que, pour tout réel x de $[-4;3]$, $f'(x) = (-x-3)e^{-x}$ et en déduire le tableau de variation de f sur $[-4;3]$.
2. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[-3;3]$, puis donner une valeur approchée de α à 0,01 prés par défaut à l'aide de la calculatrice.