Durée : 1 heures

∾ DS du 11 septembre 2019 TS1 ∾

Exercice 1 **2 points**

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = -4u_n + 3n - 1$$

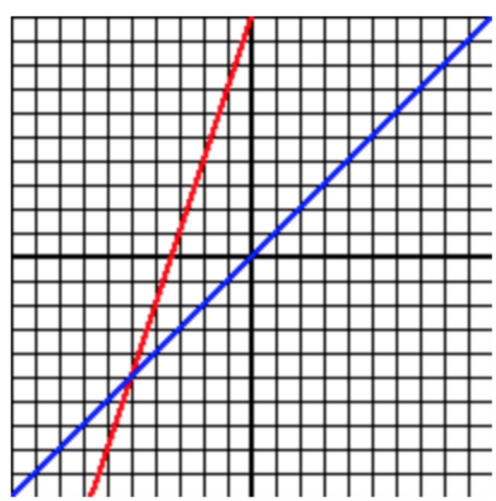
1. Calculez u_1 et u_2.
$$u_1 = -4 \times u_0 + 3 \times 0 - 1 = -21 \quad \text{et} \quad u_2 = -4 \times u_1 + 3 \times 1 - 1 = 86$$
2. A l'aide de la calculatrice déterminer les premiers termes de la suite et faire une conjecture sur les variations et les limites de la suite. Pas de résultat intéressant (ni croissant, ni décroissant)

Exercice 2 **4,5 points**

1. On considère la suite arithmétique (u_n), dont le terme initial est 333 et la raison -5. Combien cette suite possède-t-elle de termes positifs ?
$$u_n = 333 - 5n \geq 0 \Leftrightarrow 333 \geq 5n \Leftrightarrow \frac{333}{5} = 66{,}6 \geq n$$
Donc il y a 67 termes positifs.
2. Calculer la somme suivante, sachant que les termes de cette somme sont les termes d'une suite arithmétique :
$$S = -123 - 120 - \ldots - 30 = \frac{-123 - 30}{2} \times \underbrace{\left[\frac{-123 + 30}{-3} + 1\right]}_{32 \quad \text{termes}} = -2448$$
3. Déterminer l'entier n tel que :
$$8 + 9 + \ldots + n = 14000 = \frac{8+n}{2}(n - 8 + 1) \Leftrightarrow (n+8)(n-7) = 28000 \Leftrightarrow n^2 + n - 28056 = 0$$
Recherche des racines : $\Delta = 112225$ Donc $n_1 = \dfrac{-1 - \sqrt{112225}}{2 \times 1} = -168$ et $n_2 = \dfrac{-1 + \sqrt{112225}}{2 \times 1} = 167$.
Donc le n cherché est 167.

Exercice 3 **2 points**

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = -4$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f fonction affine donnée par $f(x) = 3x + 10$.



La fonction f est représentée ainsi que la droite d'équation y=x, une graduation correspondant à une unité.

1. En utilisant le graphique, représenter les premiers termes de la suite u_n (peu de termes peuvent être représentés) et conjecturer le sens de variations de la suite (u_n) .

2. Quelle semble être la limite de la suite. (Il n'est pas demandé de justifier) La limite semble être $+\infty$.

Exercice 4 **3,5 points**

Soit une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+1)^3$.

1. Donner l'expression de $f'(x) = 3 \times 1 \times (x+1)^2 = 3(x+1)^2$.
2. Calculer $f'(1) = 12$ et $f(1) = 8$.
3. Déterminer l'approximation affine de f en 1 et en déduire une valeur approchée de $f(0.994)$.

$$f(1+h) \simeq f(1) + f'(1)h = 8 + 12h$$

Donc $f(0{,}994) = f(1-0{,}006) \simeq 8 + 12 \times (-0{,}006) \simeq 7{,}928$

Exercice 5 **2 points**

Soit une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x^2 - x - 4$.
Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse -3.

$$f'(x) = 8x - 1$$

Donc l'équation de la tangente en -3 est :

$$y = f'(-3)(x+3) + f(3) = (8 \times (-3) - 1)(x+3) + 4 \times (-3)^2 - (-3) - 4 = -25x - 40$$

Exercice 6 **2 points**

Soit une fonction f par $f(x) = \dfrac{-x^2+4x-2}{x^2+2}$. Donner le domaine de définition de f et déterminer $f'(x)$.
$D_f = \mathbb{R}$ car $x^2 + 2 \geq 2 > 0$.

$$f'(x) = \frac{(-2x+4)(x^2+2) - 2x(-x^2+4x-2)}{(x^2+2)^2} = \frac{-4x^2+8}{(x^2+2)^2}$$

Exercice 7 **4 points**

Soit une fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{5}{x}$ et $a = \dfrac{-5}{9}$.
Déterminer les équations réduites des deux tangentes à la courbe représentative de f de coefficient directeur a. On commencera par déterminer les abscisses x_1 et x_2 (avec $x_1 < x_2$) des points de tangence.
Il faut résoudre $f'(x) = \dfrac{-5}{9} = \dfrac{-5}{x^2} \Leftrightarrow x = 3 \quad ou \quad x = -3$.
La tangente en -3 est : $y = \dfrac{-5}{9}(x+3) - \dfrac{5}{3} = \dfrac{-5}{9}x - \dfrac{10}{3}$
La tangente en 3 est : $y = \dfrac{-5}{9}(x-3) + \dfrac{5}{3} = \dfrac{-5}{9}x + \dfrac{10}{3}$.

Exercice 8 (justifier succinctement le résultat.) **1 points**

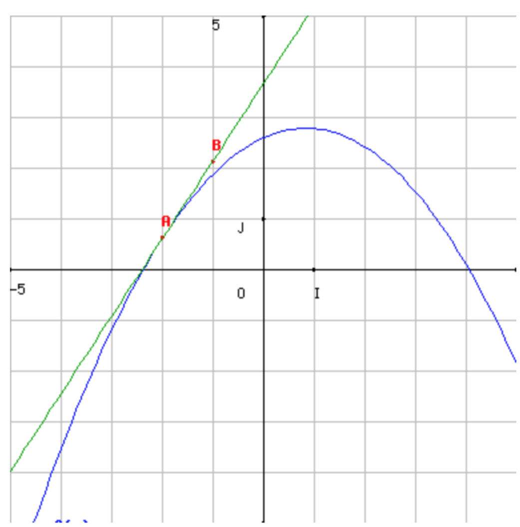
Le plan est rapporté au repère $(O; I, J)$.

La courbe C représente la fonction f définie sur $\mathbb{R}$.

La droite T est la tangente à C au point A de coordonnées (-2 , 0.61).

Sachant que T passe aussi par le point B de coordonnées (-1 , 2.14), calculer la valeur de $f'(-2)$ arrondie au dixième.

$f'(-2) =$



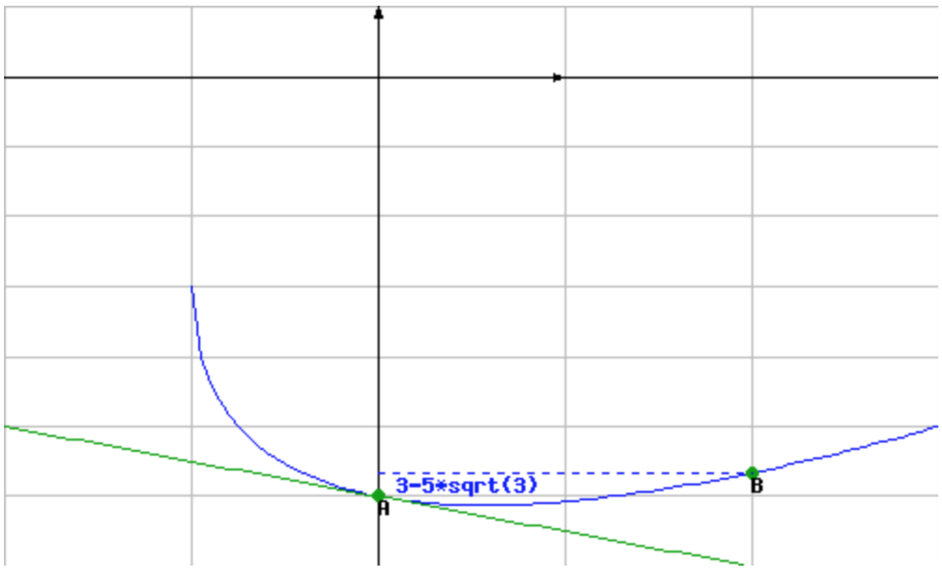
$f'(2) = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{2{,}14 - 0{,}61}{-1-(-2)} = 1{,}5$ (Coefficient directeur de la tangente en -2 donc de la droite (AB))

Exercice 9 **4 points**

La courbe ci-dessous représente une fonction f définie sur $[-1;+\infty[$ de la forme :

$$f(x) = a\sqrt{x+1} + bx + 1$$

On sait que $f(0) = -6$; $f(2) = 3 - 5\sqrt{3}$ et $f'(0) = \dfrac{-1}{2}$.



Calculer a,b et c.

$$f'(x) = \frac{a}{2\sqrt{x+1}} + b$$

$$\begin{cases} f(0) = a + c = -6 \\ f(2) = a\sqrt{3} + 2b + c = 3 - 5\sqrt{3} \\ f'(0) = \dfrac{a}{2} + b = \dfrac{-1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L1 \\ L2 - L1 - 2L3 \\ L3 \end{matrix} \begin{cases} a + c = -6 \\ a(\sqrt{3} - 2) = 10 - 5\sqrt{3} \\ \dfrac{a}{2} + b = \dfrac{-1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -6 - a = -1 \\ a = \dfrac{10 - 5\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 2} = -5 \\ b = \dfrac{-1}{2} - \dfrac{a}{2} = 2 \end{cases}$$