DS : limite de suite et exponentielle.

Exercice 1. **(5 points)** Déterminer les limites des suites suivantes :

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} -n^2+3n-1$

$$-n^2+3n-1 = n^2(-1+\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2})$$

$$\lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty}(-1+\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}) = -1 \quad \text{donc} \quad \lim_{n\to+\infty} -n^2+3n-1 = -\infty$$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-4n^2+3n-1}{1-n^2}$

$$\frac{-4n^2+3n-1}{1-n^2} = \frac{-4+\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}-1}$$

$$\lim_{n\to+\infty} -4+\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2} = -4 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2}-1 = -1 \quad \text{donc} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{-4n^2+3n-1}{1-n^2} = \frac{-4}{-1} = 4$$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^3+3n-1}{1-n^5}$

$$\frac{n^3+3n-1}{1-n^5} = \frac{n^3\left(1+\frac{3}{n^2}-\frac{1}{n^3}\right)}{n^5\left(\frac{1}{n^5}-1\right)} = \frac{1+\frac{3}{n^2}-\frac{1}{n^3}}{n^2\left(\frac{1}{n^5}-1\right)}$$

$$\lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} 1+\frac{3}{n^2}-\frac{1}{n^3} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^5}-1 = -1 \quad \text{donc} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{n^3+3n-1}{1-n^5} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1+\frac{3}{n^2}-\frac{1}{n^3}}{n^2\left(\frac{1}{n^5}-1\right)} = 0^-$$

d) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-2n^3+3n-1}{1-n^2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n\left(-2+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^3}\right)}{\frac{1}{n^2}-1} = +\infty$

e) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n^2+n}-n$ (forme in-déterminer "$+\infty-(+\infty)$")

$$\sqrt{n^2+n}-n = \frac{\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)\left(\sqrt{n^2+n}+n\right)}{\left(\sqrt{n^2+n}+n\right)} = \frac{(n^2+n-n^2)}{\left(\sqrt{n^2+n}+n\right)} = \frac{n}{\left(n\sqrt{1+\frac{1}{n}}+n\right)} = \frac{n}{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1\right)} = \frac{1}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1\right)}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right) = \sqrt{1}+1 = 2 \quad \text{donc} \quad \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n^2+n}-n = \frac{1}{2}$$

Exercice 2. **(3 points)** On souhaite déterminer la limite de la suite (u_n) définie par :

$$u_n = \frac{\sqrt{n^2+n+2}}{\sqrt{n^2-n-1}}$$

a) Montrer que : $u_n = \dfrac{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}}{\sqrt{1-\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}}$

$$u_n = \frac{\sqrt{n^2+n+2}}{\sqrt{n^2-n-1}} = \frac{n\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}}{n\sqrt{1-\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}} = \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{2}{n}}}{\sqrt{1-\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}}$$

b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

$$\lim_{n\to+\infty} 1-\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}=\lim_{n\to+\infty} 1+\frac{1}{n}+\frac{2}{n}=1 \quad \text{donc} \quad \lim_{n\to+\infty}\sqrt{1-\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{2}{n}}=1 \quad \text{donc} \quad \lim_{n\to+\infty} u_n=\frac{1}{1}=1$$

Exercice 3. **(3 points)** Soit, pour tout entier n, $u_n=\dfrac{\cos(n)}{n+1}$.

Montrer que pour tout entier n, $-\dfrac{1}{n+1}\leqslant u_n\leqslant\dfrac{1}{n+1}$, puis en déduire la limite de la suite (u_n).
Pour $n\in\mathbb{N}$, on a :

$$-1\leq\cos n\leq 1 \Leftrightarrow \frac{-1}{n+1}\leq\frac{\cos n}{n+1}\leq\frac{1}{n+1}$$

Or, on a :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{-1}{n+1}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}=0$$

Donc d'après le théorème de gendarme, on peut affirmer que la suite (u_n) admet une limite et que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n=0$$

Exercice 4. **(6 points)**

Un pays compte 300 loups en 2017. On estime que la population des loups croit naturellement au rythme de 12 % par an. Pour réguler la population des loups, le gouvernement autorise les chasseurs à tuer un quota de 18 loups par an.
On modélise la population par une suite (u_n), le terme u_n représentant le nombre de loups de ce pays en $2017+n$.

Les différentes parties de cet exercice sont indépendantes.

1. **a.** Avec ce modèle. vérifier que le nombre de loups de ce pays en 2018 sera de 318.
Augmenter de 12 % revient à multiplier par 1,12.
Donc en 2018, il y aura : $300\times1{,}12-18=318$ loups.

b. Justifier que, pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=1{,}12u_n-18$.
Pour tout entier naturel n, on note par u_n et u_{n+1} les nombres respectifs de loups les années n et $n+1$. D'après le texte, d'une année Ã l'autre le nombre de loups augmente de 12 %, puis on autorise Ã tuer 18 animaux.
Donc pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=1{,}12\times u_n-18$.

2. **a.** Recopier et compléter l'algorithme suivant pour qu'il détermine au bout de combien d'années la population de loups aura doublé.

```
N ← 0
U ← 300
Tant que U < 600 faire
    U ← 1,12 × U − 18
    N ← N + 1
Fin Tant que
```

b. A l'aide de la machine à calculer, déterminez l'année où la population de loup aura doublé.

Année	2017	2018	....	2026	2027
n'	0	1	...	6	7
Population u_n	300	318	....	566	≈ 616

En 2027, le nombre de loups aura dépassé les 600 animaux.

3. On définit la suite (v_n) par : $v_n=u_n-150$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 1,12. Préciser son terme initial.
Pour tout entier naturel n :
$v_{n+1}=u_{n+1}-150=1{,}12\times u_n-18-150=1{,}12\times u_n-168=1{,}12\times(v_n+150)-168=1{,}18v_n+168-168=1{,}12v_n$
Donc la suite (v_n) est géométrique de raison $q=1{,}12$ et de premier terme $v_0=u_0-150=150$.

b. Exprimer, pour tout $n\in\mathbb{N}$, v_n en fonction de n. En déduire que l'expression de u_n en fonction de n est :

$$u_n=150+150\times1{,}12^n$$

Donc pour tout entier naturel n, $v_n=v_0\times q^n=150\times1{,}12^n$.
Or $u_n=v_n+150$ donc :
$u_n=150\times1{,}12^n+150$.

c. Quelle est la limite de la suite (u_n) ? Justifier. Que peut-on en déduire ?
On a $1{,}12 > 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 1{,}12^n = +\infty$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 150\times 1{,}12^n = +\infty$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 150+150\times 1{,}12^n = +\infty$.
On peut donc en déduire que dans ces condition la population de loup va continuer à progresser.

4. En 2023. avec ce modèle, la population de loups est estimée à 446 loups et le rythme de croissance annuel de la population reste identique. Dans ce cas, une nouvelle décision sera prise par le gouvernement : afin de gérer le nombre de loups dans le pays, il autorisera les chasseurs à tuer un quota de 35 loups par an.
En quelle année la population de loups dépassera-t-elle 600 loups ?
Toute trace de recherche sera valorisée dans cette question.
A l'aide d'un tableau et de la calculatrice, nous pouvons déterminer le nombre de loups après 2023 en utilisant le même mode de croissance annuelle mais avec un prélèvement annuel de 35.

Année	2023	2024	2025	2026	2027	2028	2029	2030
n'	0	1	2	3	4	5	6	7
Population $w_{n'}$	446	464,52	$\approx 485{,}26$	$\approx 508{,}49$	$\approx 534{,}51$	$\approx 563{,}65$	$\approx 596{,}29$	$\approx 632{,}84$

Donc en 2030 le nombre de loups aura dépassé les 600 animaux.

Par le calcul (en s'inspirant du modèle précédent) :
Pour tout entier n, on définit par (w_n) le nombre de loups pour l'année $2023+n'$. D'après l'énoncé (et en utilisant les questions précédentes), $\forall n\in\mathbb{N}$, $w_{n+1} = 1{,}12\times w_n - 35$ et $w_0 = 446$.
Soit (a_n) la suite géométrique de raison 1,12, définie par $\forall n\in\mathbb{N}\ a_n = w_n - q$. Cherchons q.
$\forall n\in\mathbb{N}, a_{n+1} = w_{n+1} - q = 1{,}12\times w_n - 35 - q = 1{,}12\times\left(w_n - \dfrac{q+35}{1{,}12}\right)$.
De plus $\forall n\in\mathbb{N}, a_{n+1} = 1{,}12\times a_n = 1{,}12\times(w_n - q)$ donc par identification, $\dfrac{q+35}{1{,}12} = q$
soit $q+35 = 1{,}12q \iff q = \dfrac{35}{0{,}12} \approx 291{,}67$.
Donc Nous pouvons déterminer les expression de a_n et w_n en fonction de n :

— $a_0 = w_0 - 291{,}67 = 154{,}33$
— $\forall n\in\mathbb{N}, a_n = a_0\times 1{,}12^n = 154{,}33\times 1{,}12^n$
— $\forall n\in\mathbb{N}, w_n = a_n + q = 154{,}33\times 1{,}12^n + 291{,}67$.

Il ne reste plus qu'à résoudre l'inéquation : $154{,}33\times 1{,}12^n + 291{,}67 \geqslant 600$.
$154{,}33\times 1{,}12^n + 291{,}67 \geqslant 600 \iff 1{,}12^n \geqslant \dfrac{600-291{,}67}{154{,}33} \iff \ln(1{,}12^n) \geqslant \ln(1{,}998)$
$n\times\ln(1{,}12) \geqslant \ln(1{,}998) \iff n \geqslant \dfrac{\ln(1{,}998)}{\ln(1{,}12)} \iff n\geqslant 7$ car $\dfrac{\ln(1{,}998)}{\ln(1{,}12)} \approx 6{,}107$
On retrouve le résultat vu dans le tableau : selon ce nouveau modèle de croissance, le nombre de loups aura dépassé les 600 animaux en 2030

Exercice 5. *(6 points)* Les Questions sont indépendantes :

1. Calculer la somme suivante, sachant que les termes de cette somme sont les termes d'une suite arithmétique.

$$S = -73 - 70 - \ldots + 17 = \frac{-73+17}{2}\times\underbrace{\left(\frac{17-(-73)}{3}+1\right)}_{nb\ de\ termes} = -868$$

2. On considère une suite arithmétique telle que $v_8 = 20$ et $v_{12} = 28$. Alors la raison est : $r = \dfrac{28-20}{12-8} = 2$.

3. Déterminer $\left(\frac{3}{4}\right)^3 + \left(\frac{3}{4}\right)^4 + \ldots + \left(\frac{3}{4}\right)^{10} = \left(\frac{3}{4}\right)^3 \dfrac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{(10-3+1)}}{1-\frac{3}{4}} \simeq 2{,}67$ à 10^{-2} *près*.

4. On considère la suite (S_n) définie par $S_n = 0{,}8 + 0{,}8^2 + \ldots + 0{,}8^n$ pour tout entier naturel n non nul. L'expression de S_n en fonction de n est $S_n = 0{,}8\times\dfrac{1-0{,}8^n}{1-0{,}8}$.

a. Calculer $S_4 = 0{,}8\times\dfrac{1-0{,}8^4}{1-0{,}8} \simeq 2{,}36$ à 10^{-2} *près* .

b. Déterminer les valeurs de a et b de sorte que : $S_n = a + b \times 0{,}8^n$. On a $a = 4$ et $b = -4$, voir ci-dessous :

$$S_n = 0{,}8 \times \frac{1-0{,}8^n}{1-0{,}8} = \frac{0{,}8 - 0{,}8 \times 0{,}8^n}{0{,}2} = \frac{0{,}8}{0{,}2} - \frac{0{,}8}{0{,}2} \times 0{,}8^n = 4 - 4 \times 0{,}8^n$$

c. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.
On a $0 < 0{,}8 < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}8^n = 0$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} -4 \times 0{,}8^n = 0$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 4 - 4 \times 0{,}8^n = 4$.

Exercice 6. **(4 points) Dans cet exercice aucune démonstration n'est demandée.**

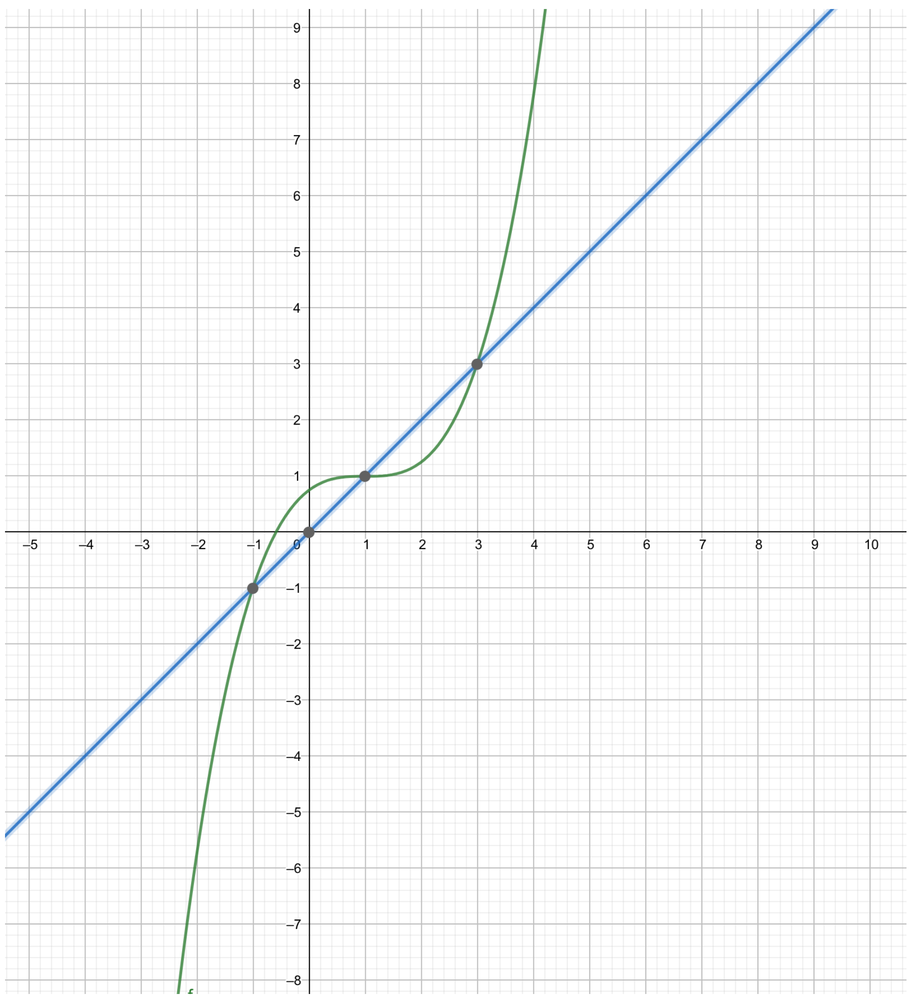
On définie la suite (u_n) par :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{(x-1)^3}{4} + 1$$

En vous appuyant sur le graphique ci-dessous (représentant la fonction f et la droite d'équation $y = x$) discuter du comportement de la suite u_n en fonction des valeurs de u_0. Vous ferez apparaitre les traits de construction justifiant vos **conjecture** sur le graphique ci-dessous :



On remarque que si :

- $u_0 < -1$ alors (u_n) est décroissante et diverge vers $-\infty$.
- $u_0 = -1$ (respectivement $u_0 = 1$, respective $u_0 = 3$) alors (u_n) est constante égale à -1 respectivement 1, respective 3).
- $-1 < u_0 < 1$ alors (u_0) est croissante et converge vers 1.
- $1 < u_0 < 3$ alors (u_0) est décroissante et converge vers 1.
- $u_0 > 3$ alors (u_0) est croissante et diverge vers $+\infty$.

Exercice 7. **(Question de cours) (3 points)**
On considère une fonction exp définie sur $\mathbb{R}$ et vérifiant : $\exp(0) = 1$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ \exp'(x) = \exp(x)$
Soit $y \in \mathbb{R}$. On définie la fonction k sur $\mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}, k(x) = \dfrac{\exp(x+y)}{\exp(x)}$

1. Déterminer l'expression de $k'(x)$. Puisque $(\exp(x+y)' = (x+y)' \times \exp(x+y) = \exp(x+y)$, on a :

$$k'(x) = \frac{(\exp(x+y))' \exp(x) - \exp(x+y)(\exp(x))'}{\left(\exp(x)\right)^2} = \frac{(\exp(x+y))\exp(x) - \exp(x+y)(\exp(x))}{\left(\exp(x)\right)^2} = 0$$

2. Comme $k'(x) = 0$, la fonction k est constante sur $\mathbb{R}$. Donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, k(x) = \frac{\exp(0+y)}{\exp(0)} = \exp(y)$$

3. Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. De la question précédente

$$k(x) = \frac{\exp(x+y)}{\exp(x)} = \exp(y) \Leftrightarrow \exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$$

Exercice 8. **(4 points)** Résoudre les équation est inéquation suivantes :

a) $e^{x^2} = e^{-2x+3} \Leftrightarrow x^2 = -2x+3 \Leftrightarrow x^2+2x-3 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+3) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \quad \text{ou} \quad x = -3$

b) $e^{x^2} > e^{-2x+3} \Leftrightarrow x^2 > -2x+3 \Leftrightarrow x^2+2x-3 > 0$ De la question précédente les racines sont 1 et -3, donc (puisque le coefficient de x^2 est positif) :

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
x^2+2x-3		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc : $S =]-\infty; -3[\cup]1; +\infty[$

c) $e^{2x} + 2e^x - 3 = 0$. On pose $X = e^x$. Donc :

$$e^{2x} + 2e^x - 3 = X^2 + 2X - 3 = 0 \Leftrightarrow X = e^x = 1 = e^0 \quad \text{ou} X = e^x = -3 \Leftrightarrow x = 0$$

d) $e^{2x} + 2e^x - 3 > 0 \Leftrightarrow (e^x - 1)(e^x + 3) > 0$ Or : $e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 0$ et $e^x + 3 > 0$. D'où le tableau de signe :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$e^x - 1$		$-$	0	$+$	
$e^x + 3$		$+$		$+$	
$(e^x - 1)(e^x + 3)$		$-$	0	$+$	

Donc $S = \mathbb{R}^{+*}$

Exercice 9. **(3 points)** Prouver, que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

a) $\dfrac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = \dfrac{e^{-2x}\left(e^{2x} - 1\right)}{e^{-2x}\left(e^{2x} + 1\right)} = \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$

b) $e^{-x} - e^{-2x} = e^{-2x}\left(\dfrac{e^{-x}}{e^{-2x}} - 1\right) = \dfrac{e^x - 1}{e^{2x}}$

c) $(e^x + e^{-x})^2 - 2 = e^{2x} + 2 \times \underbrace{e^x \times e^{-x}}_{=e^0=1} + e^{-2x} - 2 = e^{2x} + e^{-2x} = e^{2x} + \dfrac{1}{e^{2x}} = \dfrac{e^{4x} + 1}{e^{2x}}$

Exercice 10. La courbe ($\mathscr{C}$) ci-dessous représente dans un repère orthogonal une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-4\,;\,3]$. Les points A d'abscisse -3 et B$(0\,;\,2)$ sont sur la courbe ($\mathscr{C}$). Sont aussi représentées sur ce graphique les tangentes à la courbe ($\mathscr{C}$) respectivement aux points A et B, la tangente au point A étant horizontale. On note f' la fonction dérivée de f.
Les parties A et B sont indépendantes

PARTIE A

1. Par lecture graphique, déterminer :
   - **a.** $f'(-3) = 0$ puisque la tangente au point d'abscisse -3 est horizontale;
   - **b.** $f(0) = 2$ en effet le point $B(0{,}2)$ est un point de ($\mathscr{C}$) et $f'(0) = -3$ puisque le coefficient directeur de la tangente en B est -3 (je "pars" de B "j'avance" de 1 horizontalement puis "je descends" de 3 pour "revenir" sur la tangente.) .
2. La fonction f est définie sur $[-4;3]$ par

$$f(x) = a + (x+b)\mathrm{e}^{-x}$$

   où a et b sont deux réels que l'on va déterminer dans cette partie.
   - **a.** Calculer $f'(x)$ pour tout réel x de $[-4;3]$.

$$f'(x) = \mathrm{e}^{-x} - (x+b)\mathrm{e}^{-x} = (-x+1-b)\mathrm{e}^{-x}$$

   (en effet, la dérivée de la constante a est nulle, puis l'expression $(x+b)\mathrm{e}^{-x}$ est de la forme uv dont la dérivée est $u'v+uv'$. On a :

$$\begin{cases} u = x+b \\ v = \mathrm{e}^{-x} \end{cases} \quad et \quad \begin{cases} u' = 1 \\ v' = -\mathrm{e}^{-x} \end{cases}$$

   d'où le résultat précédent.)
   - **b.** Á l'aide des questions 1. b. et 2. a., montrer que les nombres a et b vérifient le système suivant :

$$\begin{cases} a+b &= 2 \\ 1-b &= -3 \end{cases}$$

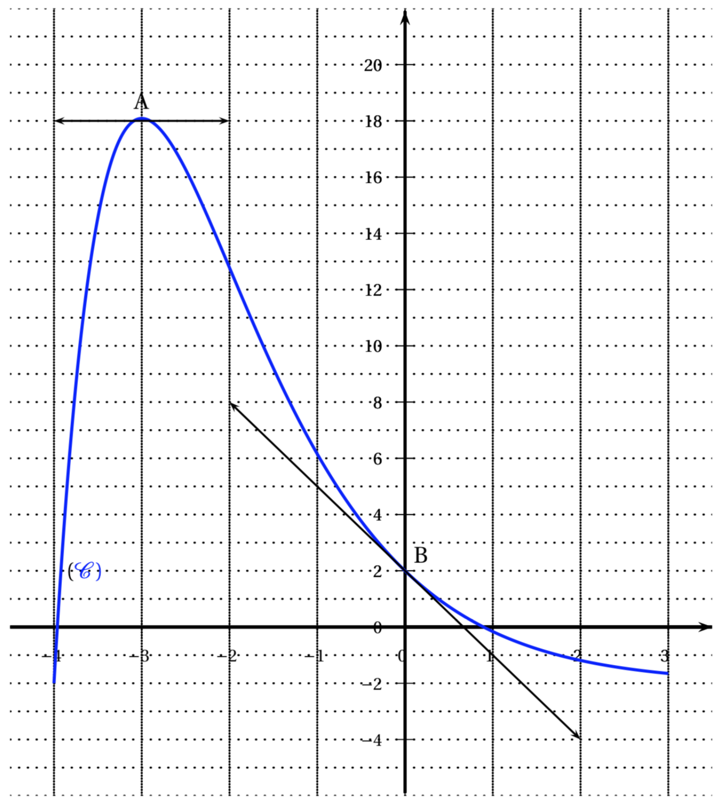
   - **c.** Déterminer alors les valeurs des nombres a et b.
   Avec les résultats de la question 2. (b), on obtient :

$$\begin{cases} f(0) = a + (0+b)\mathrm{e}^{-0} = a+b = 2 \\ f'(0) = (-0+1-b)\mathrm{e}^{-0} = (1-b) = -3 \end{cases}$$

$$Donc \quad \begin{cases} a = 2-b = -2 \\ b = 4 \end{cases}$$

   Donc l'expression de f est :

$$f(x) = -2 + (x+4)\mathrm{e}^{-x}.$$



PARTIE B

On admet que la fonction f est définie sur $[-4\,;\,3]$ par

$$f(x) = -2 + (x+4)\mathrm{e}^{-x}.$$

1. Justifier que, pour tout réel x de $[-4;3]$, $f'(x) = (-x-3)\mathrm{e}^{-x}$ et en déduire le tableau de variation de f sur $[-4;3]$.
   On a trouvé à la partie précédente :

$$f'(x) = (-x+1-b)\mathrm{e}^{-x} = (-x-3)\mathrm{e}^{-x} \quad puisque\ b = 4$$

   Comme $\mathrm{e}^{-x} > 0$, la fonction f' est du signe de $-x-3$.
   Or $-x-3 > 0 \Leftrightarrow -3 > x$. D'où le tableau de variation :

x	-4		-3	α	3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-2	$\nearrow$	$-2+\mathrm{e}^3$	$\searrow$ 0 $\searrow$	$-2+7\mathrm{e}^{-3}$

En effet $f(-4) = -2+\mathrm{e}^3$, $f(-3) = -2+\mathrm{e}^3 > 0$ et $f(3) = -2+7\mathrm{e}^{-3} \simeq -1{,}8 < 0$

2. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[-3;3]$, puis donner une valeur approchée de α à 0,01 prés par défaut à l'aide de la calculatrice.
   D'après le tableau de variation, puisque $0 \in \left[-2+7\mathrm{e}^{-3}, -2+\mathrm{e}^3\right]$ et que sur l'intervalle $[-3{,}3]$ la fonction est strictement décroissante, nous pouvons affirmer (d'après de théorème des valeurs intermédiaires) que l'équation $f(x) = 0$ admet sur cet intervalle une unique solution.