Nom : **Prénom :**

DS 1 : Suites et récurrence.

Exercice 1. **(7 points)** On considère la suite (a_n) définie par la relation de récurrence :

$$\begin{cases} a_0 = \dfrac{-23}{6} \\ a_{n+1} = \dfrac{-3a_n - 16}{a_n + 5} \end{cases}$$

Nous allons chercher à déterminer l'expression de a_n en fonction de deux façons différentes :

1. Par une suite intermédiaire. On définie la suite (b_n) par l'expression $b_n = \dfrac{1}{a_n + 4}$
   - **a.** Déterminer b_0 ?
   - **b.** Montrer que (b_n) est une suite arithmétique dont on déterminera la raison.
   - **c.** En déduire l'expression de b_n puis de a_n en fonction de n pour n entier naturel.
2. Maintenant retrouvons le résultat obtenu à la question précédente par récurrence. C'est à dire, montrer par récurrence que pour n entier naturel l'on a :
$$a_n = \frac{1}{6+n} - 4$$
3. La suite (a_n) est-elle bornée et si c'est le cas, en proposer un encadrement.
4. Étudier les variations de la suite (a_n).
5. On admet que la suite (a_n) converge vers -4. On souhaite déterminer la valeur à partir de laquelle $|a_n + 4|$ (c'est-à-dire la distance de a_n à -4) est inférieur à $0,05$.
   - **a.** Compléter l'algorithme ci-dessous :

```
N ← 0
A ← ....
Tant que |A+4| ......... faire
        A ← ...
        N ← ...
Fin Tant que
Afficher N
```

   - **b.** A l'aide de la calculatrice déterminer la valeur affichée par l'algorithme précédent et l'interpréter.

Exercice 2. **(5 points)**

— Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$S_n = \frac{1}{1\times 3} + \frac{1}{3\times 5} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)\times(2n+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)\times(2k+1)} = \frac{n}{2n+1}$$

— Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$W_n = 1\times 2 + 2\times 3 + 3\times 4 + \cdots + n\times(n+1) = \sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

Exercice 3. **(8 points)**

Un pays compte 300 loups en 2020. On estime que la population des loups croit naturellement au rythme de 12 % par an. Pour réguler la population des loups, le gouvernement autorise les chasseurs à tuer un quota de 18 loups par an.

On modélise la population par une suite (u_n), le terme u_n représentant le nombre de loups de ce pays en $2020+n$.

1. **a.** Avec ce modèle. vérifier que le nombre de loups de ce pays en 2021 sera de 318.

   b. Justifier que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_{n+1} = 1,12u_n - 18$.

2. Sur le graphique ci-dessous où sont représenter les droite d'équation $y = x$ et $y = 1,12x - 18$, construire les 4 premiers termes de la suite (u_n). Quelle conjecture peut-on faire sur les variations de la suite (u_n)

3. Montrer par récurrence que pour tout n entier naturel, on a :

$$300 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1}$$

   Que peut-on en conclure ?

4. On définit la suite (v_n) par : $v_n = u_n - 150$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 1, 12. Préciser son terme initial.

   b. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, v_n en fonction de n. En déduire que l'expression de u_n en fonction de n est :

$$u_n = 150 + 150 \times 1,12^n$$

   c. Faire une conjecture sur la limite de la suite (u_n). Interpréter cette conjecture.

5. (Bonus) En 2023. avec ce modèle, la population de loups est estimée à 446 loups et le rythme de croissance annuel de la population reste identique. Dans ce cas, une nouvelle décision sera prise par le gouvernement : afin de gérer le nombre de loups dans le pays, il autorisera les chasseurs à tuer un quota de 35 loups par an.

   En quelle année la population de loups dépassera-t-elle 600 loups ?

   Toute trace de recherche sera valorisée dans cette question.

Graphique pour l'exercice 3