Nom : **Prénom :**

DS 1 correction : Suites et récurrence.

Exercice 1. **(8 points)** On considère la suite (a_n) définie par la relation de récurrence :

$$\begin{cases} a_0 = \dfrac{-23}{6} \\ a_{n+1} = \dfrac{-3a_n - 16}{a_n + 5} \end{cases}$$

Nous allons chercher à déterminer l'expression de a_n en fonction de deux façons différentes :

1. Par une suite intermédiaire. On définie la suite (b_n) par l'expression $b_n = \dfrac{1}{a_n + 4}$

a. Déterminer b_0 ?

$$b_0 = \frac{1}{a_0 + 4} = \frac{1}{\frac{-23}{6} + 4} = \frac{6}{1} = 6$$

b. Montrer que (b_n) est une suite arithmétique dont on déterminera la raison.

On a $b_n = \dfrac{1}{a_n + 4} \Leftrightarrow a_n + 4 = \dfrac{1}{b_n} \Leftrightarrow a_n = \dfrac{1}{b_n} - 4$

$$b_{n+1} = \frac{1}{a_{n+1} + 4} = \frac{1}{\dfrac{-3a_n - 16}{a_n + 5} + 4} = \frac{a_n + 5}{-3a_n - 16 + 4a_n + 20} = \frac{a_n + 5}{a_n + 4} = \frac{\frac{1}{b_n} + 1}{\frac{1}{b_n}} = b_n + 1$$

Donc (b_n) est une suite arithmétique de raison 1 et de premier terme $b_0 = 6$

c. En déduire l'expression de b_n puis de a_n en fonction de n pour n entier naturel.

Avec le résultat de la question précédente :

$$b_n = b_0 + 1 \times n = 6 + n \qquad \text{et} \qquad a_n = \frac{1}{b_n} - 4 = \frac{1}{6 + n} - 4$$

2. Maintenant retrouvons le résultat obtenu à la question précédente par récurrence. C'est à dire, montrer par récurrence que pour n entier naturel l'on a :

$$a_n = \frac{1}{6 + n} - 4$$

On pose P_n : "$a_n = \dfrac{1}{6 + n} - 4$" pour $n \in \mathbb{N}$

Initialisation : Pour $n = 0$, on a :

$$a_0 = \frac{-23}{6} \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{6 + 0} - 4 = \frac{-23}{6}$$

Donc P_0 vrai.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons P_n vrai c'est-à-dire $a_n = \dfrac{1}{6 + n} - 4$. Alors :

$$a_{n+1} = \frac{-3a_n - 16}{a_n + 5} = \frac{-3\left(\dfrac{1}{6 + n} - 4\right) - 16}{\left(\dfrac{1}{6 + n} - 4\right) + 5} = \frac{\dfrac{-3}{6 + n} - 4}{\left(\dfrac{1}{6 + n} + 1\right)} = \frac{\dfrac{-3 - 24 - 4n}{6 + n}}{\left(\dfrac{7 + n}{6 + n}\right)} = \frac{-27 - 4n}{7 + n}$$

Nous devons obtenir :

$$\frac{1}{6 + (n + 1)} - 4 = \frac{1 - 28 - 4n}{n + 7)} = \frac{-27 - 4n}{7 + n}$$

Nous avons montré que P_n vrai implique que P_{n+1}. Or nous avons que P_0 vrai. Nous avons donc montré par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \frac{1}{6 + n} - 4$$

3. La suite (a_n) est-elle bornée et si c'est le cas, en proposer un encadrement.

L'on a :

$$n \geqslant 0 \Leftrightarrow n+6 \geqslant 6 \underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{la fonction inverse étant } \downarrow \text{ sur } \mathbb{R}^+} 0 < \frac{1}{n+6} \leqslant \frac{1}{6} \Leftrightarrow -4 < \underbrace{\frac{1}{n+6} - 4}_{a_n} \leqslant \frac{1}{6} - 4 = \frac{-23}{6}$$

La suite (a_n) est donc bien bornée.

4. Étudier les variations de la suite (a_n).

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+7} - 4 - \left(\frac{1}{n+6} - 4\right) = \frac{1}{n+7} - \frac{1}{n+6} = \frac{-1}{(n+7)(n+6)} < 0$$

La suite (u_n) est donc décroissante.

5. On admet que la suite (a_n) converge vers -4. On souhaite déterminer la valeur à partir de laquelle $|a_n + 4|$ (c'est-à-dire la distance de a_n à -4) est inférieur à $0,05$.

a. Compléter l'algorithme ci-dessous :

```
N ← 0
A ← −23/6
Tant que |A+4| >0,05 faire
    A ← (−3 ∗ A − 16)/(A + 5)
    N ← N + 1
Fin Tant que
Afficher N
```

b. A l'aide de la calculatrice déterminer la valeur affichée par l'algorithme précédent et l'interpréter.

On obtient :

n	13	14
a_n	-3,947	-3,95

Donc le terme à partir duquel les termes de la suite sont *proches* de -4 de moins de 0,05 est le terme d'indice 14.

Exercice 2. **(4 points)** Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$S_n = 1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \cdots + n \times (n+1) = \sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

On pose P_n : "$S_n = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$" pour $n \in \mathbb{N}^*$

Initialisation : Pour $n = 0$, on a :

$$S_1 = 1 \times 2 = 2 \qquad \text{et} \qquad \frac{1 \times 2 \times 3}{3} = 2$$

Donc P_0 vrai.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons P_n vrai c'est-à-dire $S_n = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$. Alors :

$$S_{n+1} = S_n + (n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} + (n+1)(n+2) = (n+1)(n+2)\left(\frac{n}{3} + 1\right) = \frac{(n+1)(n+2)(n+4)}{3}$$

Nous avons montré que P_n vrai implique que P_{n+1}. Or nous avons que P_0 vrai.

Nous avons donc montré par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

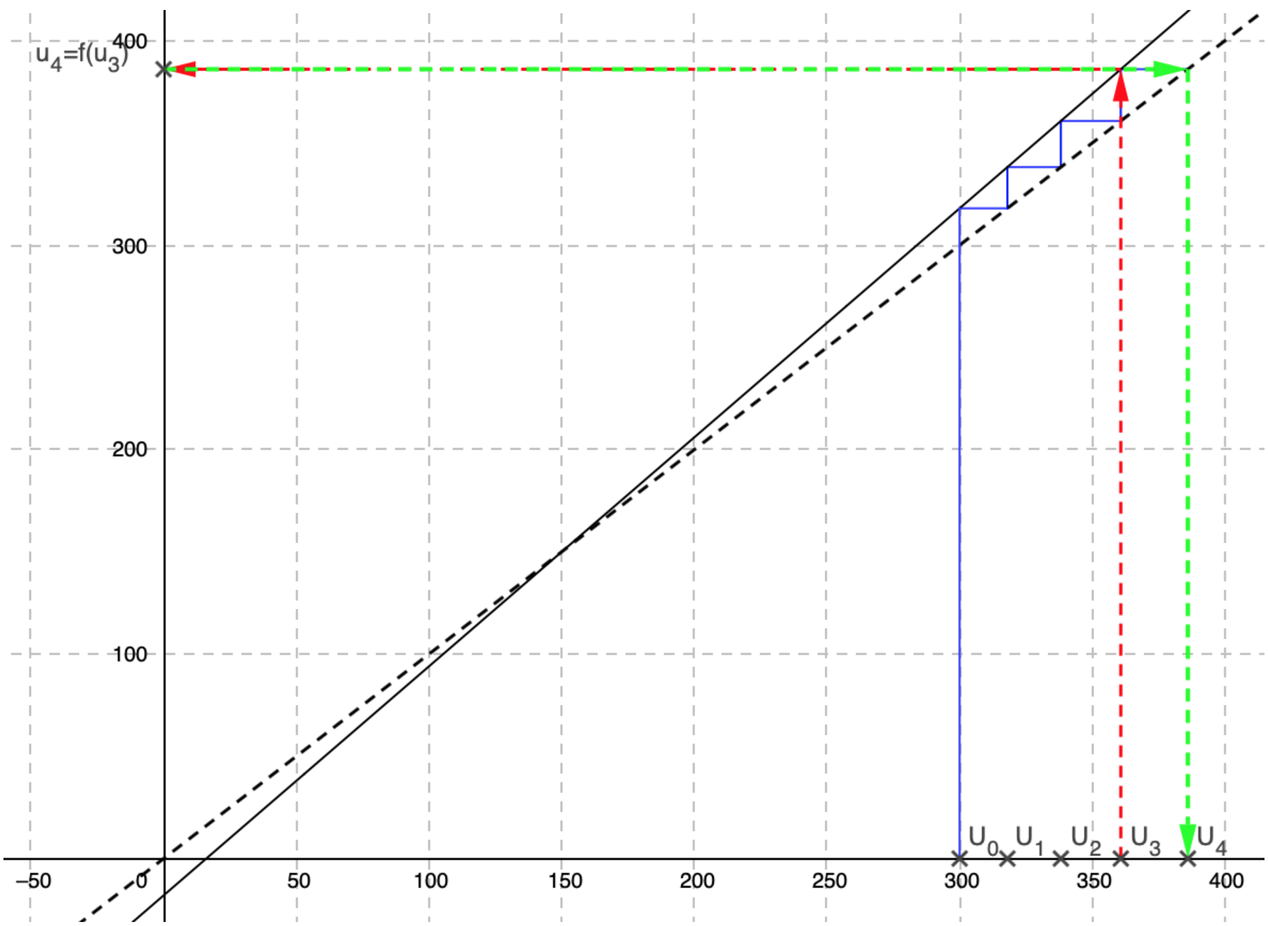
Exercice 3. Un pays compte 300 loups en 2020. On estime que la population des loups croit naturellement au rythme de 12 % par an. Pour réguler la population des loups, le gouvernement autorise les chasseurs à tuer un quota de 18 loups par an.

On modélise la population par une suite (u_n), le terme u_n représentant le nombre de loups de ce pays en $2020 + n$.

1. **a.** Avec ce modèle. vérifier que le nombre de loups de ce pays en 2021 sera de 318. Augmenter de 12 % revient à multiplier par $1,12$.
Donc en 2018, il y aura : $300 \times 1,12 - 18 = 318$ loups.

   b. Justifier que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_{n+1} = 1,12u_n - 18$.
Pour tout entier naturel n, on note par u_n et u_{n+1} les nombres respectifs de loups les années n et $n+1$. D'après le texte, d'une année Ã l'autre le nombre de loups augmente de 12 %, puis on autorise Ã tuer 18 animaux.
Donc pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 1,12 \times u_n - 18$.

2. Sur le graphique fourni en annexe, construire les 4 premiers termes de la suite (u_n). Quelle conjecture peut-on faire sur les variations de la suite (u_n)



On remarque que la suite (u_n) est croissante et semble diverger vers $+\infty$.

3. Montrer par récurrence que pour tout n entier naturel, on a :

$$300 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1}$$

Que peut-on en conclure?
On pose P_n : "$300 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1}$" pour $n \in \mathbb{N}$
Initialisation : Pour $n = 0$, on a :

$$u_1 = 118 \qquad donc \qquad 300 \leqslant u_0 \leqslant u_1$$

Donc P_0 vrai.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons P_n vrai c'est-à-dire $300 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1}$. Alors :

$$300 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \Leftrightarrow 300 \times 1,12 \leqslant u_n \times 1,12 \leqslant u_{n+1} \times 1,12 \Leftrightarrow \underbrace{300 \times 1,12 - 18}_{318} \leqslant \underbrace{u_n \times 1,12 - 18}_{u_{n+1}} \leqslant \underbrace{u_{n+1} \times 1,12 - 18}_{u_{n+2}}$$

Nous avons montré que P_n vrai implique que P_{n+1}. Or nous avons que P_0 vrai. Nous avons donc montré par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 300 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1}$$

4. On définit la suite (v_n) par : $v_n = u_n - 150$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $1,12$. Préciser son terme initial.
Pour tout entier naturel n :
$v_{n+1} = u_{n+1} - 150 = 1,12 \times u_n - 18 - 150 = 1,12 \times u_n - 168 = 1,12 \times (v_n + 150) - 168 = 1,18 v_n + 168 - 168 = 1,12 v_n$
Donc la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 1,12$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 150 = 150$.

b. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, v_n en fonction de n. En déduire que l'expression de u_n en fonction de n est :

$$u_n = 150 + 150 \times 1,12^n$$

Donc pour tout entier naturel n, $v_n = v_0 \times q^n = 150 \times 1,12^n$.
Or $u_n = v_n + 150$ donc :
$u_n = 150 \times 1,12^n + 150$.

c. Faire une conjecture sur la limite de la suite (u_n). Interpréter cette conjecture.
On a $1,12 > 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 1,12^n = +\infty$. Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 150 \times 1,12^n = +\infty$. Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} 150 + 150 \times 1,12^n = +\infty$.
On peut donc en déduire que dans ces condition la population de loup va continuer à progresser.

5. (Bonus) En 2023. avec ce modèle, la population de loups est estimée à 446 loups et le rythme de croissance annuel de la population reste identique. Dans ce cas, une nouvelle décision sera prise par le gouvernement : afin de gérer le nombre de loups dans le pays, il autorisera les chasseurs à tuer un quota de 35 loups par an.
En quelle année la population de loups dépassera-t-elle 600 loups ?
Toute trace de recherche sera valorisée dans cette question.
A l'aide d'un tableau et de la calculatrice, nous pouvons déterminer le nombre de loups après 2023 en utilisant le même mode de croissance annuelle mais avec un prélèvement annuel de 35.

Année	2023	2024	2025	2026	2027	2028	2029	2030
n'	0	1	2	3	4	5	6	7
Population $w_{n'}$	446	464,52	$\approx 485,26$	$\approx 508,49$	$\approx 534,51$	$\approx 563,65$	$\approx 596,29$	$\approx 632,84$

Donc en 2030 le nombre de loups aura dépassé les 600 animaux.

Par le calcul (en s'inspirant du modèle précédent) :
Pour tout entier n, on définit par (w_n) le nombre de loups pour l'année $2023 + n'$. D'après l'énoncé (et en utilisant les questions précédentes), $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = 1,12 \times w_n - 35$ et $w_0 = 446$.
Soit (a_n) la suite géométrique de raison $1,12$, définie par $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_n = w_n - q$. Cherchons q.
$\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = w_{n+1} - q = 1,12 \times w_n - 35 - q = 1,12 \times \left(w_n - \dfrac{q+35}{1,12}\right)$.
De plus $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = 1,12 \times a_n = 1,12 \times (w_n - q)$ donc par identification, $\dfrac{q+35}{1,12} = q$
soit $q + 35 = 1,12q \iff q = \dfrac{35}{0,12} \approx 291,67$.
Donc Nous pouvons déterminer les expression de a_n et w_n en fonction de n :

- $a_0 = w_0 - 291,67 = 154,33$
- $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = a_0 \times 1,12^n = 154,33 \times 1,12^n$
- $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = a_n + q = 154,33 \times 1,12^n + 291,67$.

Il ne reste plus qu'à résoudre l'inéquation : $154,33 \times 1,12^n + 291,67 \geqslant 600$.
$154,33 \times 1,12^n + 291,67 \geqslant 600 \iff 1,12^n \geqslant \dfrac{600 - 291,67}{154,33} \iff \ln(1,12^n) \geqslant \ln(1,998)$
$n \times \ln(1,12) \geqslant \ln(1,998) \iff n \geqslant \dfrac{\ln(1,998)}{\ln(1,12)} \iff n \geqslant 7$ car $\dfrac{\ln(1,998)}{\ln(1,12)} \approx 6,107$
On retrouve le résultat vu dans le tableau : selon ce nouveau modèle de croissance, le nombre de loups aura dépassé les 600 animaux en 2030