DS 1 : Récurrence.

Question de cours :

a) Démontrez par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 3^n \geqslant 1+2n$$

b) Soit $x \in [-1, +\infty[$. Démontrez par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (1+x)^n \geqslant 1+nx$$

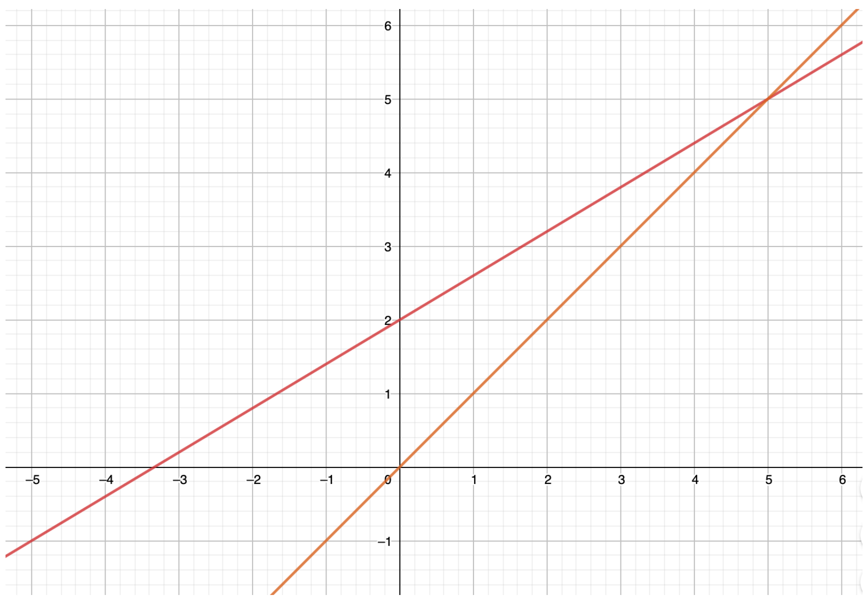
Exercice 1. On considère une suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = -5 \\ u_{n+1} = \frac{3}{5}u_n + 2 \end{cases}$$

On décide d'étudier le comportement de cette suite.

1. Etude graphique.

a. Représenter graphiquement les premiers termes de cette suite sur le graphique ci-dessous :



b. Quelle conjecture peut-on faire sur le comportement de cette suite ?

2. Récurrence :

a. Montrer par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, -5 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 5$$

b. Que peut-on en déduire ?

3. Dans cette question, on étudie la suite (v_n) par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = 5 - u_n$$

a. Interpréter graphiquement les termes de cette suite.

b. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{3}{5}$.

c. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, v_n en fonction de n. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

4. On souhaite déterminer la valeur à partir de laquelle v_n est inférieur à 10^{-2}.

a. Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous :

```
N ← 0
U ← ....
V ← ....
Tant que V...... 10^{-2} faire
        U ← ...
        V ← ...
        N ← ...
Fin Tant que
Afficher N
```

b. A l'aide de la calculatrice déterminer la valeur affichée par l'algorithme précédent.

Exercice 2. Les Questions sont indépendantes :

1. Calculer la somme suivante, sachant que les termes de cette somme sont les termes d'une suite arithmétique.

$$S = -73 - 70 - ... + 17$$

2. Déterminer l'entier n tel que : $\quad 4+5+...+n = 19104$
3. On considère une suite arithmétique telle que $u_3 = 0$ et

$$S = \sum_{k=3}^{26} u_k = u_3 + u_4 + ... + u_{26} = 276$$

Déterminer la raison de cette suite.

Exercice 3. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$S_n = \frac{1}{2\times 4} + \frac{1}{4\times 6} + ... + \frac{1}{2n\times(2n+2)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k\times(2k+2)} = \frac{n}{4(n+1)}$$

Exercice 4. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + n - 2$.

On souhaite démontrer que l'expression des termes de la suite (u_n) en fonction de n pour n entier naturel, est donnée par :

$$u_n = \frac{(n-1)(n-4)}{2}$$

Pour cela nous utiliserons deux méthodes.

1. Démontrer cette formule par récurrence.
2. Dans cette question, l'on considère la suite auxiliaire (v_n) telle que, pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, $v_n = u_{n+1} - u_n$.
   - **a.** Montrer que la suite (v_n) est arithmétique.
   - **b.** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la somme $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_{n-1}$.
     Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'on a :

$$S_n = u_n - u_0$$

   - **c.** Calculer cette somme d'une autre manière.
   - **d.** Comparer les deux expressions obtenues et conclure.

Exercice 5. Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n^2}$.

1. Déterminer la valeur de u_1.
2. Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant u_{n+1}$$

3. Que peut-on en déduire ?
4. Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \sqrt{2n+1}$$