DS du 3 juin 2019 de 1 STMG.

A Loi binomiale.

Proposition 1

Si $X \sim \mathcal{B}(n;p)$ (c'est-à-dite que X suit une loi binomiale de paramètre n et p) alors :

- $E(X) = np$
- $P(X = n) = p^n$
- $P(X = 0) = (1 - p)^n$
- $P(X \geqslant 1) = 1 - (1 - p)^n$

B Intervalle de Fluctuation.

Proposition 2

On considère une population dont une proportion p des individus possèdent un caractère donné.
On prélève dans cette population un **échantillon** de taille n. Soit X la variable aléatoire représentant le nombre d'individus possédant ce caractère dans cet **échantillon**. Alors X suit une loi $\mathscr{B}(n,p)$.
Dans le cas où

- $n \geqslant 30$ (l'effectif de l'échantillon)
- $np \geqslant 5$ (l'espérance des succès)
- $n(1 - p) \geqslant 5$ (l'espérance des échecs)

alors on obtient un intervalle proche de **l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % associée à la variable aléatoire X** , avec la formule :

$$I_F = \left[p - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}; p + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right]$$

C Prise de décision

Proposition 3

Si l'on fait **l'hypothèse** : "La proportion du caractère dans la population est égale à p" et que la fréquence observé sur **l'échantillon** de taille n est f. Alors :

- Si $f \in I_F$, **l'hypothèse** n'est pas rejetée au seuil de risque d'erreur de 5 %.
- Si $f \notin I_F$, **l'hypothèse** est rejetée au seuil de risque d'erreur de 5 %.

D Estimation d'une proportion.

Proposition 4

On considère une population dont une proportion p des individus possèdent un caractère donné.
On prélève dans cette population un **échantillon** de taille n et l'on obtient une fréquence f de cet échantillon possédant le caractère étudié.
On appelle **l'intervalle de confiance de la proportion p au niveau de confiance 0,95**, l'intervalle :

$$I_C = \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}; f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$$

Il faudra bien sûr $n \geqslant 30$ (l'effectif de l'échantillon), $nf \geqslant 5$ et $n(1 - f) \geqslant 5$.

Exercice 1. Lors d'élection législative, la liste A obtient le score de $p = 0,23 = 23\%$. Six mois après cette élection, on décide d'interroger "$n = 837$" personnes.

Parmi ces personnes interrogés, on note X la variable donnant le nombre de personnes ayant voté pour la liste A.

1. Déterminer la loi suivit par X ainsi que ses paramètres en considérant que le résultat de cette élection serait toujours le même si l'on faisait cette élection aujourd'hui.
2. Déterminer **un intervalle de fluctuation au seuil de 95 %** de la proportion de personnes interrogés ayant voté pour la liste A.
3. On observe que le résultat de la liste A auprès des ces personnes interrogés est de 20,4 %. Interpréter ce résultat à l'aide de l'intervalle précédent.
4. On refait la même expérience au bout de 1 an. On interroge cette fois 3237 personnes. On obtient alors 20,6 % de personnes parmi ces 3237 personnes qui voteraient pour la liste A.

   Après avoir déterminé un nouvel intervalle de fluctuation, interprété ce nouveau résultat.
5. Maintenant, on suppose que $n = 5$.

   On considère que la proportion de personnes ayant voté pour la liste A est toujours de 0,23.

   (a) Déterminer la loi suivit par X.

   (b) Déterminer la probabilité pour que sur ces 5 personnes :

      i. Aucune n'aient voté pour A.

      ii. Toutes aient voté pour A.

      iii. Au moins une ait voté pour A.

Exercice 2. Lors de l'élection présidentielle de 1965, on a effectué un sondage des intentions de vote pour le premier tour un mois avant l'élection. On a décidé d'interroger "$n = 2537$" personnes.

1. Le candidat A aurait obtenu au premier tour un score de $f = 0,55 = 55$ %. Déterminer **un intervalle de confiance au seuil de 95 %** du résultat de A au premier tour de l'élection. Comment interpréter ce résultat si l'élection présidentielle avait eu lieu à la suit de ce sondage.
2. La veille du premier tour d'élection présidentielle, on a effectué un nouveau sondage mais auprès de 837 personnes. On a obtenu une estimation de 47 % des personnes interrogées indiquant qui voterait le lendemain pour le candidat A.

   (a) Déterminer **un intervalle de confiance au seuil de 95 %** du résultat de A au premier tour de l'élection. Interpréter ce résultat.

   (b) Le candidat A a obtenu au premier tour (5 décembre 1965) le résultat de 44,65 %. Ce résultat est-il en contradiction avec le résultat obtenu lors du sondage.

DS du 3 juin 2019 de 1 STMG.

E Loi binomiale.

Proposition 5

Si $X \sim \mathcal{B}(n;p)$ (c'est-à-dite que X suit une loi binomiale de paramètre n et p) alors :

- $E(X) = np$
- $P(X = n) = p^n$
- $P(X = 0) = (1-p)^n$
- $P(X \geqslant 1) = 1 - (1-p)^n$

F Intervalle de Fluctuation.

Proposition 6

On considère une population dont une proportion p des individus possèdent un caractère donné.
On prélève dans cette population un **échantillon** de taille n. Soit X la variable aléatoire représentant le nombre d'individus possédant ce caractère dans cet **échantillon**. Alors X suit une loi $\mathscr{B}(n,p)$.
Dans le cas où

- $n \geqslant 30$ (l'effectif de l'échantillon)
- $np \geqslant 5$ (l'espérance des succès)
- $n(1-p) \geqslant 5$ (l'espérance des échecs)

alors on obtient un intervalle proche de **l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % associée à la variable aléatoire X** , avec la formule :

$$I_F = \left[p - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}; p + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right]$$

G Prise de décision

Proposition 7

Si l'on fait **l'hypothèse** : "La proportion du caractère dans la population est égale à p" et que la fréquence observé sur **l'échantillon** de taille n est f. Alors :

- Si $f \in I_F$, **l'hypothèse** n'est pas rejetée au seuil de risque d'erreur de 5 %.
- Si $f \notin I_F$, **l'hypothèse** est rejetée au seuil de risque d'erreur de 5 %.

H Estimation d'une proportion.

Proposition 8

On considère une population dont une proportion p des individus possèdent un caractère donné.
On prélève dans cette population un **échantillon** de taille n et l'on obtient une fréquence f de cet échantillon possédant le caractère étudié.
On appelle **l'intervalle de confiance de la proportion p au niveau de confiance 0,95**, l'intervalle :

$$I_C = \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}; f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$$

Il faudra bien sûr $n \geqslant 30$ (l'effectif de l'échantillon), $nf \geqslant 5$ et $n(1-f) \geqslant 5$.

Exercice 1. Lors d'élection législative, la liste A obtient le score de $p = 0,22 = 22\%$. Six mois après cette élection, on décide d'interroger "$n = 837$" personnes.

Parmi ces personnes interrogés, on note X la variable donnant le nombre de personnes ayant voté pour la liste A.

1. Déterminer la loi suivit par X ainsi que ses paramètres en considérant que le résultat de cette élection serait toujours le même si l'on faisait cette élection aujourd'hui.
2. Déterminer **un intervalle de fluctuation au seuil de 95 %** de la proportion de personnes interrogés ayant voté pour la liste A.
3. On observe que le résultat de la liste A auprès des ces personnes interrogés est de 19,4 %. Interpréter ce résultat à l'aide de l'intervalle précédent.
4. On refait la même expérience au bout de 1 an. On interroge cette fois 3237 personnes. On obtient alors 19,6 % de personnes parmi ces 3237 personnes qui voteraient pour la liste A.

   Après avoir déterminé un nouvel intervalle de fluctuation, interprété ce nouveau résultat.
5. Maintenant, on suppose que $n = 4$.

   On considère que la proportion de personnes ayant voté pour la liste A est toujours de 0,23.
   (a) Déterminer la loi suivit par X.
   (b) Déterminer la probabilité pour que sur ces 5 personnes :
      i. Aucune n'aient voté pour A.
      ii. Toutes aient voté pour A.
      iii. Au moins une ait voté pour A.

Exercice 2. Lors de l'élection présidentielle de 1965, on a effectué un sondage des intentions de vote pour le premier tour un mois avant l'élection. On a décidé d'interroger "$n = 2537$" personnes.

1. Le candidat A aurait obtenu au premier tour un score de $f = 0,55 = 55$ %. Déterminer **un intervalle de confiance au seuil de 95 %** du résultat de A au premier tour de l'élection. Comment interpréter ce résultat si l'élection présidentielle avait eu lieu à la suit de ce sondage.
2. La veille du premier tour d'élection présidentielle, on a effectué un nouveau sondage mais auprès de 837 personnes. On a obtenu une estimation de 47 % des personnes interrogées indiquant qui voterait le lendemain pour le candidat A.
   (a) Déterminer **un intervalle de confiance au seuil de 95 %** du résultat de A au premier tour de l'élection. Interpréter ce résultat.
   (b) Le candidat A a obtenu au premier tour (5 décembre 1965) le résultat de 44,65 %. Ce résultat est-il en contradiction avec le résultat obtenu lors du sondage.

DS du 3 juin 2019 de 1 STMG.

I Loi binomiale.

Proposition 9

Si $X \sim \mathcal{B}(n;p)$ (c'est-à-dite que X suit une loi binomiale de paramètre n et p) alors :

- $E(X) = np$
- $P(X = n) = p^n$
- $P(X = 0) = (1-p)^n$
- $P(X \geqslant 1) = 1 - (1-p)^n$

J Intervalle de Fluctuation.

Proposition 10

On considère une population dont une proportion p des individus possèdent un caractère donné.
On prélève dans cette population un **échantillon** de taille n. Soit X la variable aléatoire représentant le nombre d'individus possédant ce caractère dans cet **échantillon**. Alors X suit une loi $\mathscr{B}(n,p)$.
Dans le cas où

- $n \geqslant 30$ (l'effectif de l'échantillon)
- $np \geqslant 5$ (l'espérance des succès)
- $n(1-p) \geqslant 5$ (l'espérance des échecs)

alors on obtient un intervalle proche de **l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % associée à la variable aléatoire X** , avec la formule :

$$I_F = \left[p - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} ; p + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right]$$

K Prise de décision

Proposition 11

Si l'on fait **l'hypothèse** : "La proportion du caractère dans la population est égale à p" et que la fréquence observé sur **l'échantillon** de taille n est f. Alors :

- Si $f \in I_F$, **l'hypothèse** n'est pas rejetée au seuil de risque d'erreur de 5 %.
- Si $f \notin I_F$, **l'hypothèse** est rejetée au seuil de risque d'erreur de 5 %.

L Estimation d'une proportion.

Proposition 12

On considère une population dont une proportion p des individus possèdent un caractère donné.
On prélève dans cette population un **échantillon** de taille n et l'on obtient une fréquence f de cet échantillon possédant le caractère étudié.
On appelle **l'intervalle de confiance de la proportion p au niveau de confiance 0,95**, l'intervalle :

$$I_C = \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$$

Il faudra bien sûr $n \geqslant 30$ (l'effectif de l'échantillon), $nf \geqslant 5$ et $n(1-f) \geqslant 5$.

Exercice 1. Lors d'élection législative, la liste A obtient le score de $p = 0,24 = 24\%$. Six mois après cette élection, on décide d'interroger "$n = 837$" personnes.

Parmi ces personnes interrogés, on note X la variable donnant le nombre de personnes ayant voté pour la liste A.

1. Déterminer la loi suivit par X ainsi que ses paramètres en considérant que le résultat de cette élection serait toujours le même si l'on faisait cette élection aujourd'hui.

   Répétition d'une même expérience 837 fois, deux issues possibles et de façon indépendante. X le nombre de personnes interrogées qui ont voté pour la liste A suit une loi binomiale de paramètre n=837 et p=0,23.

2. Déterminer **un intervalle de fluctuation au seuil de 95 %** de la proportion de personnes interrogés ayant voté pour la liste A.

   Dans le cas où
   - $n = 837 \geqslant 30$ (l'effectif de l'échantillon)
   - $np = 837 \times 0,23 = 192,5 \geqslant 5$ (l'espérance des succès)
   - $n(1-p) = 0,77 \times 837 = 644,5 \geqslant 5$ (l'espérance des échecs)

   alors on obtient un intervalle proche de **l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % associée à la variable aléatoire X** , avec la formule :

$$I_F = \left[p - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}; p + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right] = \left[0,23 - 1,96\sqrt{\frac{0,23(1-0,23)}{837}}; 0,23 - 1,96\sqrt{\frac{0,23(1-0,23)}{837}}\right]$$

$$I_F = [0,201; 0,259]$$

3. On observe que le résultat de la liste A auprès des ces personnes interrogés est de 21,4 %. Interpréter ce résultat à l'aide de l'intervalle précédent.

   On a $0,214 \in I_F$, donc on ne peut pas affirmer au seuil de 95 % que les intention de vote pour la liste A à baissé au bout de 6 mois.

4. On refait la même expérience au bout de 1 an. On interroge cette fois 3237 personnes. On obtient alors 21,6 % de personnes parmi ces 3237 personnes qui voteraient pour la liste A.

   Après avoir déterminé un nouvel intervalle de fluctuation, interprété ce nouveau résultat.

$$I_F = \left[0,23 - 1,96\sqrt{\frac{0,23(1-0,23)}{3237}}; 0,23 - 1,96\sqrt{\frac{0,23(1-0,23)}{3237}}\right] = [0,216; 0,244]$$

   On a $0,206 \notin I_F$ donc au seuil de 95 % on peut affirmer que le résultat de la liste A à baissé depuis les élections.

5. Maintenant, on suppose que $n = 4$.

   On considère que la proportion de personnes ayant voté pour la liste A est toujours de 0,23.

   (a) Déterminer la loi suivit par X.
   Répétition d'une même expérience 837 fois, deux issues possibles et de façon indépendante. X le nombre de personnes interrogées qui ont voté pour la liste A suit une loi binomiale de paramètre n=4 et p=0,23.

   (b) Déterminer la probabilité pour que sur ces 5 personnes :

      i. Aucune n'aient voté pour A.
$$P(X = 0) = (1 - 0,23)^4 \simeq 0,352$$

      ii. Toutes aient voté pour A.
$$P(X = 4) = 0,23^4 \simeq 0,003$$

      iii. Au moins une ait voté pour A.
$$P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) \simeq 0,648$$

Exercice 2. Lors de l'élection présidentielle de 1965, on a effectué un sondage des intentions de vote pour le premier tour un mois avant l'élection. On a décidé d'interroger "$n = 2537$" personnes.

1. Le candidat A aurait obtenu au premier tour un score de $f = 0,55 = 55$ %. Déterminer **un intervalle de confiance au seuil de 95 %** du résultat de A au premier tour de l'élection. Comment interpréter ce résultat si l'élection présidentielle avait eu lieu à la suit de ce sondage.

$$I_C = \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}; f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right] = \left[0,55 - \frac{1}{\sqrt{2537}}; 0,55 + \frac{1}{\sqrt{2537}}\right] = [0,53; 0,57]$$

   On peut donc estimer au seuil de confiance de 95 % que le candidat A serait élu si l'élection avait lieu à la suite de ce sondage.

2. La veille du premier tour d'élection présidentielle, on a effectué un nouveau sondage mais auprès de 837 personnes. On a obtenu une estimation de 47 % des personnes interrogées indiquant qui voterait le lendemain pour le candidat A.

   (a) Déterminer **un intervalle de confiance au seuil de 95 %** du résultat de A au premier tour de l'élection. Interpréter ce résultat.

   $$I_C = \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}; f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right] = \left[0,47 - \frac{1}{\sqrt{837}}; 0,47 + \frac{1}{\sqrt{837}}\right] = [0,435; 0,504]$$

   On ne peut donc pas affirmer au seuil de confiance de 95 % que le candidat A ne sera pas élu dés le premier tour puisque $0,5 \in I_C$.

   (b) Le candidat A a obtenu au premier tour (5 décembre 1965) le résultat de 44,65 %. Ce résultat est-il en contradiction avec le résultat obtenu lors du sondage.

   Puisque $0,4465 \in I_C$, les résultats de ce premier tour ne sont pas en contradiction avec les résultats du sondage.