DS 2 : Limites de suites et fonctions.

Question de cours : (2,5 points)
On suppose connue les résultats suivants :

- $\exp'(x) = \exp(x)$
- $\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad \exp(x) \geq 1$
- $\exp(0) = 1$

On accepte la notation $\exp(x) = e^x$.
L'objectif : Démontrer $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \mathrm{e}^x - \dfrac{x^2}{2}$.

1. Déterminer les expressions de $f'(x)$ et $f''(x)$.
2. Déterminer le signe de $f''(x)$ puis les variations de f' et son signe sur $\mathbb{R}^+$.
3. Déterminer les variations de f et son signe sur $\mathbb{R}^+$.
4. En déduire $\dfrac{\mathrm{e}^x}{x} \geq \dfrac{x}{2}$ pour tout $x \geq 0$.
5. En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$.

Exercice 1. (3 points)

On considère la suite (S_n) définie par $S_n = 1 + 0{,}6 + 0{,}6^2 + \ldots + 0{,}6^n$ pour tout entier naturel n non nul. L'expression de S_n en fonction de n est alors $S_n = \dfrac{1 - 0{,}6^{n+1}}{1 - 0{,}6}$.

1. Calculer S_4.
2. Déterminer les valeurs de a et b de sorte que : $S_n = a + b \times 0{,}6^n$.
3. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.

Exercice 2. (4,5 points)

1. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x + \sin x}{x}$. Interpréter ce résultat pour la représentation graphique de la fonction $h(x) = \dfrac{2x + \sin x}{x}$.
2. $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \dfrac{x - 3}{x - 1}$. Interpréter ce résultat pour la représentation graphique de la fonction $j(x) = \dfrac{x - 3}{x - 1}$.
3. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos(2x) + 1}{x - \frac{\pi}{2}}$. Interpréter ce résultat pour la représentation graphique de la fonction $t(x) = \cos(2x)$ au point d'abscisse $\dfrac{\pi}{2}$.

Exercice 3. (3,5 points)

On définie la suite (u_n) par :

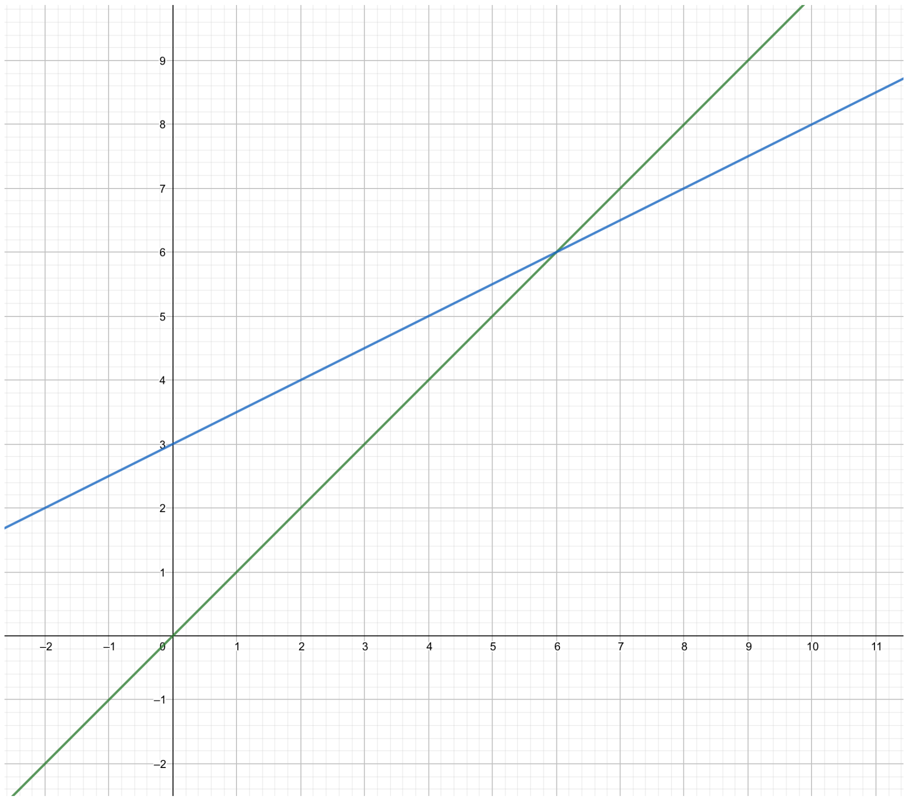
$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 0{,}5x + 3$

Partie A :

Dans cette partie aucune démonstration n'est demandée.

En vous appuyant sur le graphique ci-dessous (représentant la fonction f et la droite d'équation $y = x$) discuter du comportement de la suite u_n en fonction des valeurs de u_0. Vous ferez apparaitre les traits de construction justifiant vos **conjectures** sur le graphique ci-dessous :



Partie B :

Dans cette partie $u_0 = -5$.

On définie la suite (v_n) par $v_n = u_n - 6$ pour tout n entier naturel.

1. Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont vous donnerez le premier terme et la raison.
2. En déduire l'expression de v_n puis u_n en fonction de n.
3. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$?
4. Écrire un petit programme permettant de déterminer la première valeur de n tel que $|6 - u_n| < 0{,}01$.

Exercice 4. **(6,5 points)** La courbe $(\mathscr{C})$ ci-dessous représente dans un repère orthogonormal $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Le point A d'abscisse 3 et l'origine O sont sur la courbe $(\mathscr{C})$.
Sont aussi représentées sur ce graphique les tangentes à la courbe $(\mathscr{C})$ respectivement aux points A et O, la tangente au point A étant horizontale. On note f' la fonction dérivée de f.
Les parties A et B sont indépendantes

PARTIE A

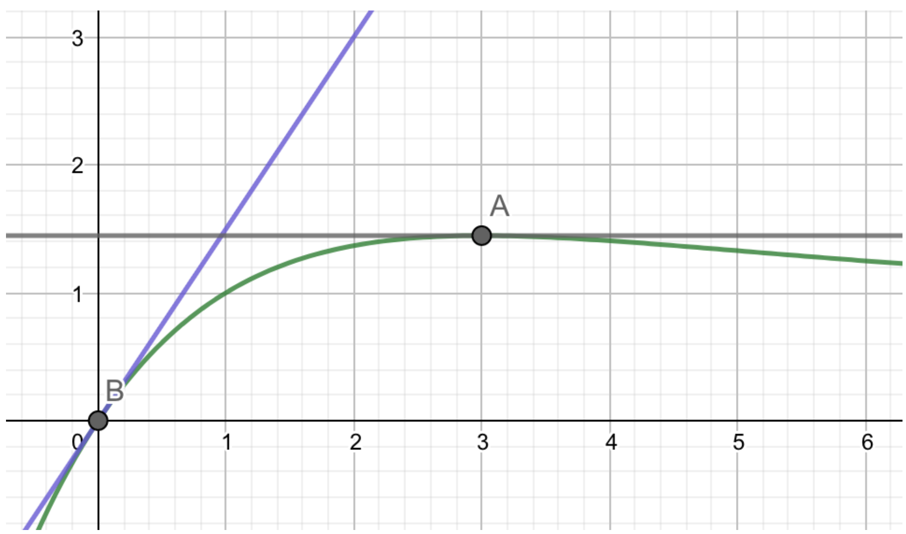
1. Par lecture graphique, déterminer en justifiant succinctement :
   a. $f'(3)$;
   b. $f(0)$ et $f'(0)$.
2. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = a + (x+b)\mathrm{e}^{-0,5x}$$

   où a et b sont deux réels que l'on va déterminer dans cette partie.
   a. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x de $\mathbb{R}$.
   b. Á l'aide des questions 1. b. et 2. a., montrer que les nombres a et b vérifient le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a+b & = & 0 \\ 1-0,5b & = & 1,5 \end{array}\right.$$

   c. Déterminer alors les valeurs des nombres a et b.



PARTIE B

On admet que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 + (x-1)\mathrm{e}^{-0,5x}$.

1. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
2. En déduire que $(\mathscr{C})$ admet une asymptote et en donner une équation.
3. Justifier que, pour tout réel x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{3-x}{2}\mathrm{e}^{-0,5x}$ et en déduire le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.
4. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = \dfrac{6}{5}$ sur $\mathbb{R}$, puis donner une valeur approchée à 0,01 prés par défaut à l'aide de la calculatrice de la plus petite de ces solutions.
5. Discuter du nombre de solutions de l'équation $f(x) = k$ où k est un réel.