

# DS 2 : Fonctions et dénombrement.

**Question de cours :** (2 points) Enoncé et démontrer la formule du triangle de Pascal.

**Exercice 1.** (3 points)

1. On considère une suite  $(u_n)$  définie par :

$$\begin{cases} u_0 = -5 \\ u_{n+1} = \frac{3}{5}u_n + 2 \end{cases}$$

On décide d'étudier le comportement de cette suite.

a. i. Montrer par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, -5 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 5$$

ii. Que peut-on en déduire ?

b. Dans cette question, on étudie la suite  $(v_n)$  par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = 5 - u_n$$

i. Interpréter graphiquement les termes de cette suite.

ii. Montrer que la suite  $(v_n)$  est une suite géométrique de raison  $\frac{3}{5}$ .

iii. Exprimer, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $v_n$  en fonction de  $n$ . En déduire l'expression de  $u_n$  en fonction de  $n$ .

2. On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 2$  et, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = u_n + n - 2$ .

On souhaite démontrer que l'expression des termes de la suite  $(u_n)$  en fonction de  $n$  pour  $n$  entier naturel, est donnée par :

$$u_n = \frac{(n-1)(n-4)}{2}$$

Pour cela nous utiliserons deux méthodes. Démontrer cette formule par récurrence.

**Exercice 2.** (4 points) on considère la fonction définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$  par l'expression :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2 + 2x + 6}{x - 1}$$

1. Déterminer le domaine de dérivation de la fonction  $f$  et sa fonction dérivée.

2. Dresser le tableau de variation de la fonction  $f$  après avoir déterminé ses limites aux bornes de son ensemble de définition.

3. A partir du tableau de variation de  $f$ , déterminer le nombre de solution de l'équation  $f(x) = 14$ . Puis résoudre cette équation.

4. Soit  $k \in \mathbb{R}$ . Discuter suivant les valeurs de  $k$  le nombre de solution de l'équation  $f(x) = k$ .

**Exercice 3.** (2,5 points) On considère l'ensemble  $E = \llbracket 1, 8 \rrbracket$ . Donner :

a) Le nombre de 3-listes de  $E$ .

d) Le nombre de permutations de  $E$ .

b) Le nombre de 3-listes sans répétition de  $E$

c) Le nombre de parties de  $E$  à 3 éléments

e) Le nombre de sous-ensembles de  $E$ .

**Exercice 4.** (4 points) **Grilles de mots croisés.**

Une grille de mots croisés est un tableau rectangulaire à  $n$  lignes et  $p$  colonnes, constitué de  $n \times p$  cases dont certaines sont noircies et d'autres pas.

1. Dans cette question, on s'intéresse aux grilles à 6 lignes et 4 colonnes avec 4 cases noircies.

a. Combien de grilles différentes peut-on former ?

b. Parmi ces grilles, combien d'entre-elles ont :

- exactement deux coins noircis ?
- au moins un coin noirci ?
- exactement une case noircie par colonne ?

2. On s'intéresse maintenant aux grilles à  $n$  lignes et  $p$  colonnes avec  $k$  cases noircies ( $k \in \llbracket 1, np \rrbracket$ ).

a. Combien de grilles différentes peut-on former ?

b. Parmi ces grilles, combien d'entre-elles ont au plus une case noircie par colonne ?

**Exercice 5.** (2,5 points)

Sur le graphique ci-dessous, la droite  $d$  à pour équation

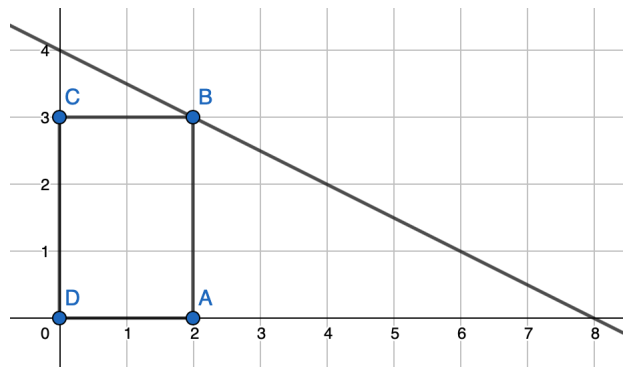
$$y = 4 - \frac{1}{2}x$$

Les points  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  forment un rectangle avec :

- Le point  $A$  a pour coordonnées  $(x, 0)$
- Le point  $B$  est sur la droite  $d$
- Le point  $C$  est sur l'axe des ordonnées
- Le point  $D$  est l'origine

On remarque que la valeur de  $x$  varie sur  $[0; 8]$  et représente la longueur  $DA$ .

On note  $S(x)$  la surface du rectangle  $ABCD$ .



1. Montrer que  $S(x) = x\left(4 - \frac{1}{2}x\right)$ .
2. Déterminer la forme développée de la fonction  $S$
3. Déterminer le tableau de variation de la fonction  $S$  sur l'intervalle  $[0, 8]$ .
4. En déduire la position du point  $A$  (c'est-à-dire la valeur de  $x$ ) pour que la surface du rectangle  $ABCD$  soit maximale puis déterminer cette valeur maximale.

**Exercice 6.** (3 points) Pour cet exercice, vous pouvez conserver les coefficients binomiaux pour exprimer le nombre de solutions demandées. Inutile de les calculer.

1. Combien de façons différentes y a-t-il de mettre 4 lettres dans 3 boîtes à lettres?
2. Il y a 4 bus, 4 conducteurs et 4 contrôleurs. Combien de façons y a-t-il d'attribuer les conducteurs et contrôleurs aux bus de manière à ce que chaque bus ait un conducteur et un contrôleur?
3. Dans une classe de 7 garçons et de 7 filles, combien de possibilités y a-t-il pour composer un comité de classe de 5 élèves, sachant qu'il doit y avoir au moins 2 garçons et 2 filles dans le comité?
4. Parmi 16 élèves d'une classe, 14 parlent anglais, 13 parlent allemand. Tout élève parle soit anglais soit allemand. Maintenant il faut en choisir deux, dont l'un parle anglais et l'autre parle allemand. Combien de choix possibles y a-t-il?
5. De combien de façons distinctes peut-on diviser une classe de 12 élèves en 3 groupes de 4 élèves chacun?
6. Soient 12 droites dans le plan, dont 7 horizontales et 5 verticales. Combien de rectangles peut-on former avec ces 12 droites?