DS 2 : Limites de suites et fonctions.

Question de cours : (2,5 points)
On suppose connue les résultats suivants :

- $\exp'(x) = \exp(x)$
- $\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad \exp(x) \geq 1$

On accepte la notation $\exp(x) = e^x$.
L'objectif : Démontrer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \mathrm{e}^x - \dfrac{x^2}{2}$.

1. Déterminer les expressions de $f'(x)$ et $f''(x)$.

$$f'(x) = \mathrm{e}^x - x \qquad \text{et} \qquad f''(x) = \mathrm{e}^x - 1$$

2. Déterminer le signe de $f''(x)$ puis les variations de f' et son signe sur $\mathbb{R}^+$. Comme $e^x \geq 1$ sur $\mathbb{R}^+$, on a $f''(x) \geq 0$ sur $\mathbb{R}^+$ d'où le tableau :

x	0		$+\infty$
$f''(x)$	0	$+$	
$f'(x)$	1	$\nearrow$	
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	

3. Déterminer les variations de f et son signe sur $\mathbb{R}^+$. Voir ci-dessus.

4. En déduire $\dfrac{\mathrm{e}^x}{x} \geq \dfrac{x}{2}$ pour tout $x \geq 0$.
D'après le tableau précédent pour tout $x > 0$:

$$f(x) \geq 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^x - \frac{x^2}{2} \geq 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^x \geq \frac{x^2}{2} \Leftrightarrow \frac{\mathrm{e}^x}{x} \geq \frac{x}{2}$$

5. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$.
Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x} = +\infty$, par théorème de comparaison de limite, on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$

Exercice 1. **(3 points)**

On considère la suite (S_n) définie par $S_n = 1 + 0{,}6 + 0{,}6^2 + \ldots + 0{,}6^n$ pour tout entier naturel n non nul. L'expression de S_n en fonction de n est alors $S_n = \dfrac{1-0{,}6^{n+1}}{1-0{,}6}$.

1. Calculer $S_4 = 2{,}3056$.

2. Déterminer les valeurs de a et b de sorte que : $S_n = a + b \times 0{,}6^n$. On a $a = \dfrac{5}{2}$ et $b = \dfrac{3}{2}$, voir ci-dessous :

$$S_n = \frac{1-0{,}6^{n+1}}{1-0{,}6} = \frac{1}{0{,}4} - \frac{0{,}6}{0{,}4} \times 0{,}8^n = \frac{5}{2} - \frac{3}{2} \times 0{,}6^n$$

3. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.
On a $0 < 0{,}6 < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}6^n = 0$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3}{2} \times 0{,}6^n = 0$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{5}{2} - \dfrac{3}{2} \times 0{,}6^n = \dfrac{5}{2}$.

Exercice 2. (4,5 points)

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x+\sin x}{x}$. Interpréter ce résultat pour la représentation graphique de la fonction $h(x) = \dfrac{2x+\sin x}{x}$.
   Pour tout x <0 :

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow 2x-1 \leq 2x+\sin x \leq 2x+1 \Rightarrow \frac{2x-1}{x} \leq \frac{2x+\sin x}{x} \leq \frac{2x+1}{x}$$

   En utilisant la règle des limites des monômes de plus haut degré dans le cas d'une fraction rationnelle, on a :

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x+1}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x-1}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{x} \lim_{x\to-\infty} 2 = 2$$

   Le théorème des gendarme nous permet d'affirmer que $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x+\sin x}{x}$ existe et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x+\sin x}{x} = 2$
   La représentation graphique de h admet donc la droite d'équation $y = 2$ comme asymptote en $-\infty$.

2. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \dfrac{x-3}{x-1}$. Interpréter ce résultat pour la représentation graphique de la fonction $j(x) = \dfrac{x-3}{x-1}$.

   On a : $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} x-1 = 0^-$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} x-3 = -2$, donc $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \dfrac{x-3}{x-1} = +\infty$ et la droite d'équation $x = 1$ est une asymptote à la courbe représentative de j.

3. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos(2x)+1}{x-\frac{\pi}{2}}$. Interpréter ce résultat pour la représentation graphique de la fonction $t(x) = \cos(2x)$ au point d'abscisse $\dfrac{\pi}{2}$.
   On a $t\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \cos(\pi) = -1$, donc :

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2x)+1}{x-\frac{\pi}{2}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{t(x)-t\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x-\frac{\pi}{2}} \underbrace{=}_{\text{Taux d'accroisement en } \frac{\pi}{2}} = t'\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

   Or $t'(x) = -2\sin(2x) = 0$. Donc $t'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -\sin(0) = 0$.
   Donc : $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos(2x)+1}{x-\frac{\pi}{2}} = 0$.
   La tangente à la courbe représentative de t en 0 est horizontale.

Exercice 3. (3,5 points)

On définie la suite (u_n) par :

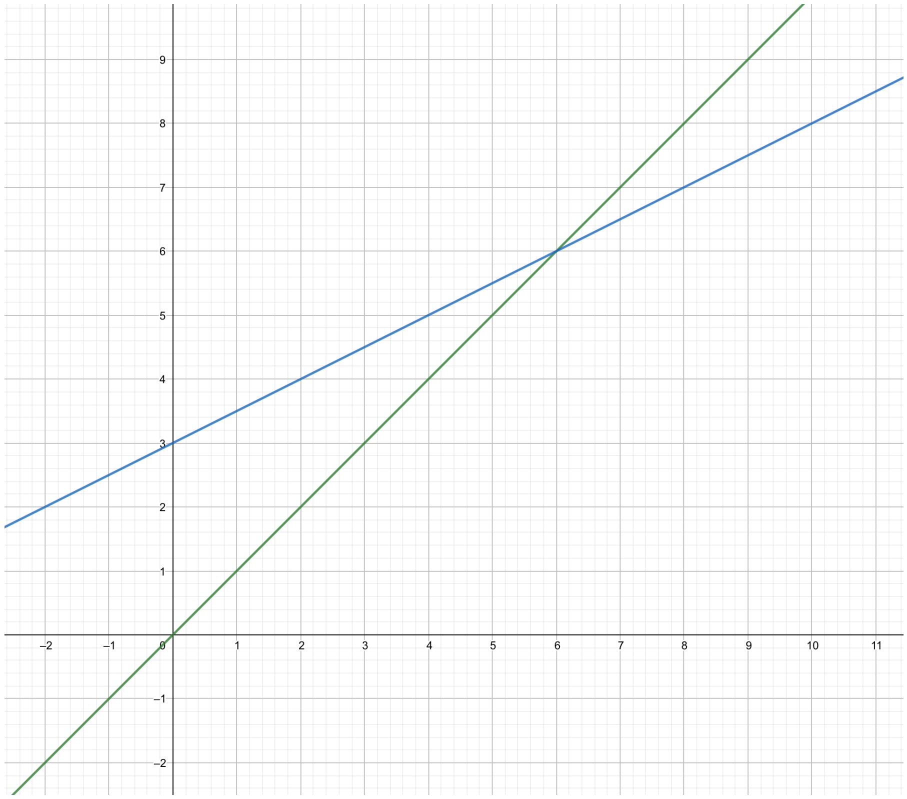
$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 0{,}5x+3$

Partie A :

Dans cette partie aucune démonstration n'est demandée.

En vous appuyant sur le graphique ci-dessous (représentant la fonction f et la droite d'équation $y = x$) discuter du comportement de la suite u_n en fonction des valeurs de u_0. Vous ferez apparaitre les traits de construction justifiant vos **conjectures** sur le graphique ci-dessous :



- Si $u_0 < 6$ la suite est strictement croissante et converge vers 6.
- Si $u_0 = 6$ la suite est constante égale à 6.
- Si $u_0 >$ § la suite est décroissante et converge vers 6.

Partie B :

Dans cette partie $u_0 = -5$.
On définie la suite (v_n) par $v_n = u_n - 6$ pour tout n entier naturel.

1. Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont vous donnerez le premier terme et la raison.

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 6 = 0{,}5u_n + 3 - 6 = 0{,}5(v_n + 6) - 3 = 0{,}5v_n + 3 - 3 = 0{,}5v_n$$

   Donc la suite (v_n) est géométrique de raison 0,5 et de premier terme $v_0 = u_0 - 6 = -11$.

2. En déduire l'expression de v_n puis u_n en fonction de n.
   De précédemment on déduit que $v_n = -11 \times 0{,}5^n$ et donc $u_n = v_n + 6 = 6 - 11 \times 0{,}5^n$.

3. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$?
   Comme $|0{,}5| < 1$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}5^n = 0$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} 6 - 11 \times 0{,}5^n = 6$.

4. Écrire un petit programme permettant de déterminer la première valeur de n tel que $|6 - u_n| < 0{,}01$.

$N \leftarrow 0$
$U \leftarrow -5$
Tant que $U < 5{,}99$ faire *(en supposant ici que (u_n) est croissante. Sinon $U < 6{,}01$ and $U > 5{,}99$)*
  $U \leftarrow 0{,}5 \times U + 3$
  $N \leftarrow N + 1$
Fin Tant que

Exercice 4. **(6,5 points)** La courbe $(\mathscr{C})$ ci-dessous représente dans un repère orthogonormal $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Le point A d'abscisse 3 et l'origine O sont sur la courbe $(\mathscr{C})$.
Sont aussi représentées sur ce graphique les tangentes à la courbe $(\mathscr{C})$ respectivement aux points A et O, la tangente au point A étant horizontale. On note f' la fonction dérivée de f.
Les parties A et B sont indépendantes

PARTIE A

1. Par lecture graphique, déterminer :
   a. $f'(3) = 0$ car la tangente à $(\mathscr{C})$est horizontale en $x = 3$;
   b. $f(0) = 0$ car l'origine est un point de $(\mathscr{C})$et $f'(0) = \dfrac{3}{2}$ est le coefficient directeur de la tangente en $x = 0$.
2. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = a + (x+b)\mathrm{e}^{-0,5x}$$

où a et b sont deux réels que l'on va déterminer dans cette partie.
   a. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x de $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = \mathrm{e}^{-0,5x} - 0,5(x+b)\mathrm{e}^{-0,5x} = (-0,5x + 1 - 0,5b)\mathrm{e}^{-0,5x}$$

   b. Á l'aide des questions 1. b. et 2. a., montrer que les nombres a et b vérifient le système suivant :

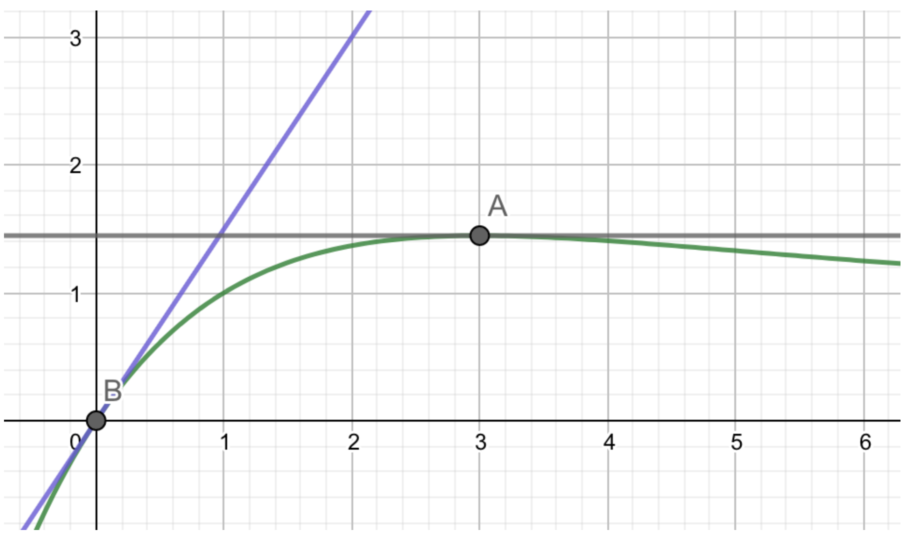
$$\left\{\begin{array}{lcl} a+b & = & 0 \\ 1-0,5b & = & 1,5 \end{array}\right.$$

On a :

$$f(0) = a + (0+b)\mathrm{e}^{-0,5\times 0} = a + b = 0 \quad \text{et} \quad f'(0) = (-0,50 + 1 - 0,5b)\mathrm{e}^{-0,5\times 0} = 1 - 0,5b = 1,5$$

   c. Déterminer alors les valeurs des nombres a et b.

$$\left\{\begin{array}{lcl} a+b & = & 0 \\ 1-0,5b & = & 1,5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} a & = & -b = 1 \\ b & = & \dfrac{0,5}{-0,5} = -1 \end{array}\right.$$



PARTIE B

On admet que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 + (x-1)\mathrm{e}^{-0,5x}$.

1. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.

- limite en $-\infty$

En posant $X = -0{,}5x$, on a $x = -2X$ donc si $x \to -\infty$ alors $X \to +\infty$. Donc :

$$\lim_{x\to-\infty} 1 + (x-1)\mathrm{e}^{-0,5x} = \lim_{x\to+\infty} 1 + (-2X-1)\mathrm{e}^{X} = -\infty$$

Car $\lim_{X\to+\infty} \mathrm{e}^X = +\infty$ et $\lim_{X\to+\infty} -2X-1 = -\infty$.

- limite en $+\infty$

En posant $X = -0{,}5x$, on a $x = 2X$ donc si $x \to +\infty$ alors $X \to +\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} 1 + (x-1)\mathrm{e}^{-0,5x} = \lim_{X\to+\infty} 1 + \frac{(2X-1}{\mathrm{e}^X} = \lim_{X\to+\infty} 1 + 2\frac{X}{\mathrm{e}^X} - \frac{1}{\mathrm{e}^X} = 1$$

Car $\lim_{X\to+\infty} \frac{X}{\mathrm{e}^X} = 0$ et $\lim_{X\to+\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^X} = 0$ (résultat du cours)

2. En déduire que $(\mathscr{C})$ admet une asymptote et en donner une équation.

Puisque

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$$

La courbe représentative $(\mathscr{C})$admet une asymptote horizontale en $+\infty$ d'équation $y = 1$.

3. Justifier que, pour tout réel x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{3-x}{2}\mathrm{e}^{-0,5x}$ et en déduire le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = \mathrm{e}^{-0,5x} - \frac{1}{2}(x-1)\mathrm{e}^{-0,5x} = \left(\frac{-1}{2}x + \frac{1}{2} + 1\right)\mathrm{e}^{-0,5x} = \frac{3-x}{2}\mathrm{e}^{-0,5x}$$

Puisque $\mathrm{e}^{-0,5x} > 0$ la fonction f' est du signe de $\frac{3-x}{2}$. Or $\frac{3-x}{2} > 0 \Leftrightarrow x < 3$ donc :

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f'(x)$	$+$	z	$-$		
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$1+2\mathrm{e}^{-1,5}$	$\searrow$	1

On a : $f(3) = 1 + 2\mathrm{e}^{-1,5} \simeq 1{,}45$ à 10^{-2} près.

4. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = \frac{6}{5}$ sur $\mathbb{R}$, puis donner une valeur approchée à 0,01 prés par défaut à l'aide de la calculatrice de la plus petite de ces solutions.

D'après le tableau de variation précédent, du fait que la fonction f soit continue strictement monotone de $]-\infty{,}3]$ sur $\left]-\infty{,}1+2\mathrm{e}^{-1,5}\right]$ puis de $[3;+\infty[$ sur $\left]1;1+2\mathrm{e}^{-1,5}\right]$e t qu'enfin $\frac{6}{5}$ appartient à la fois à $\left]-\infty{,}1+2\mathrm{e}^{-1,5}\right]$ et $\left]1;1+2\mathrm{e}^{-1,5}\right]$, en utilisant le théorème des valeurs intermédiaire on peut affirmer qu'il existe deux solution à l'équation $f(x) = \frac{6}{5}$ sur $\mathbb{R}$. Une sur $]-\infty{,}3]$ et l'autre sur $[3;+\infty[$.

On a :

x	1,4	1,41
$f(x)$	1,1986	1,2025

Donc la valeur approchée à 0,01 prés par défaut est 1,4.

5. Discuter du nombre de solutions de l'équation $f(x) = k$ où k est un réel.

Sur l'ensemble	$]-\infty;1]$	$\left]1;1+2e^{-1,5}\right[$	$\left\{1+2\mathrm{e}^{-1,5}\right\}$	$\left[1+2\mathrm{e}^{-1,5};+\infty\right[$
Nombre de solutions.	1	2	1	Aucune