DS 2 : Dérivation locale, probabilité conditionnelle.

Exercice 1. (4 points) Résoudre les inéquations suivantes :

a) $-x^2+7x \leqslant 2x-6$

b) $\dfrac{3}{x} \leqslant x+2$

Correction : Résoudre les inéquations suivantes :

a) $-x^2+7x \leqslant 2x-6$

$$-x^2+7x \leqslant 2x-6 \Leftrightarrow 0 \leqslant x^2-5x-6$$

On a $\Delta = (-5)^2 - 4\times 1 \times (-6) = 49 = 7^2$. Donc :

$$x_1 = \frac{5+7}{2} = 6 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{5-7}{2} = -1$$

Comme $a = 1 > 0$, on a $S =]-\infty, -1] \cup [6, +\infty[$.

b) $\dfrac{3}{x} \leqslant x+2$

$$\frac{3}{x} \leqslant x+2 \Leftrightarrow 0 \leqslant \frac{x^2+2x-3}{x}$$

- Pour x^2+2x-3 on a $\Delta = 16 = 4^2$. Donc :

$$x_1 = \frac{-2-4}{2} = -3 \qquad \text{et} \qquad x_2 = 1$$

- Pour x évident

x	$-\infty$		-3		0		1		$+\infty$
x^2+2x-3		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{x^2+2x-3}{x}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

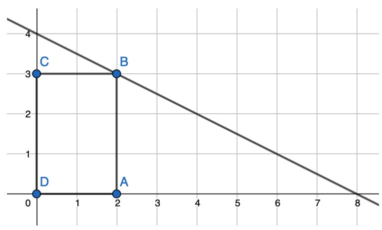
Donc $S = [-3; 0[\cup [1; +\infty[$.

Exercice 2. (4 points)

Sur le graphique ci-dessous, la droite d à pour équation $y = 4 - \dfrac{1}{2}x$ et les points A, B, C et D forment un rectangle avec :

- Le point A a pour coordonnées $(x, 0)$
- Le point B est sur la droite d
- Le point C est sur l'axe des ordonnées
- Le point D est l'origine

On remarque que la valeur de x varie sur $[0; 8]$ et représente la longueur DA. On note $S(x)$ la surface du rectangle $ABCD$.



Montrer que pour $x \in [0, 8]$, on a $S(x) = x\left(4 - \dfrac{1}{2}x\right)$. Puis déterminer le tableau de variation de S et en déduire la position du point A pour que la surface du rectangle $ABCD$ soit maximale et déterminer cette valeur maximale.

1. Montrer que $S(x) = x\left(4 - \dfrac{1}{2}x\right)$.

   On a $DA = x$ et $AB = y_b - y_A = 4 - \dfrac{1}{2}x - 0 = 4 - \dfrac{1}{2}x$. Donc :

$$S(x) = DA \times AB = x\left(4 - \frac{1}{2}x\right)$$

2. Déterminer la forme développée de la fonction S

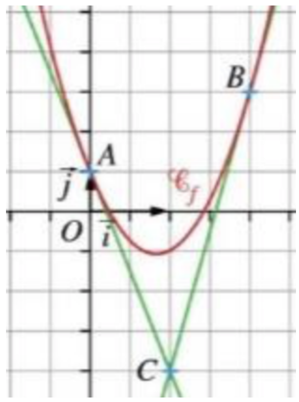
$$S(x) = x\left(4 - \frac{1}{2}x\right) = 4x - \frac{1}{2}x^2$$

3. Déterminer le tableau de variation de la fonction S.
On a $\alpha = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-4}{2\times\frac{-1}{2}} = 4$ et $f(\beta) = 8$. D'où le tableau :

x	0		4		8
$S(x)$	0	$\nearrow$	8	$\searrow$	0

4. En déduire la position du point A (c'est-à-dire la valeur de x) pour que la surface du rectangle $ABCD$ soit maximale.
D'après le tableau de variation précédent, la surface est maximale pour $x = 4$ et elle vaut alors $\beta = 8$.

Exercice 3. (2 points) Ci-contre, nous avons la représentation graphique d'une fonction f et de deux de ses tangentes (AC) et (BC) tracées aux points A et B de coordonnées respectives $(1,1)$ et $(4,3)$.



Déterminer graphiquement les valeurs de $f(0)$, $f'(0)$, $f(4)$ et $f'(4)$.

Déterminer l'équation de la tangente en B.

Correction :

- $f(0) = 1$ (Coordonnées du point A sont $(0,1)$.
- $f'(0) = \dfrac{-5}{2}$ coefficient directeur de la tangente en 0.
- $f(4) = 3$ (Coordonnées du point B sont $(4,3)$.
- $f'(4) = \dfrac{7}{2}$ coefficient directeur de la tangente en 4.

L'équation de la tangente en B est : $y = f'(4)(x-4) + f(4) = \dfrac{7}{2}(x-4) + 3 = \dfrac{7}{2}x - 11$.

Exercice 4. (3 points) On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = 1 + \frac{3}{x}$$

1. Montrer que g est dérivable en 5 et donner la valeur de $g'(5)$.
2. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de $\mathscr{C}_g$ de g au point d'abscisse 5.

Correction :

1.

$$\tau_5(h) = \frac{g(5+h) - g(5)}{h} = \frac{1 + \frac{3}{5+h} - \left(1 + \frac{3}{5}\right)}{h} = \frac{\frac{3}{5+h} - \frac{3}{5}}{h} = \frac{15 - 3(5+h)}{5(5+h)} \times \frac{1}{h} = \frac{-3}{h+5} \underbrace{\longrightarrow}_{h\to 0} \frac{-3}{25}$$

Donc g est dérivable en 5 est son nombre dérivée est $g'(5) = \dfrac{-3}{5}$. (Par ailleurs $g(5) = 1 + \dfrac{3}{5} = \dfrac{8}{25}\Big)$

2. L'équation de la tangente en 5 à la courbe représentative de g est :

$$y = g'(5)(x-5) + g(5) = \frac{-3}{25}(x-5) + \frac{8}{5} = \frac{-3}{5}x + \frac{11}{5}$$

Exercice 5. Soit la fonction f est définie pour tout réel x par $f'(x) = x^2 - 3x + 6$. Montrer que pour tout a réel, f est dérivable en a et $f'(a) = 2a - 3$.
Déterminer une autre fonction g, tel que pour tout a réel, g est dérivable en a et $g'(a) = 2a - 3$.

Correction :

$$\begin{aligned}\tau_a(h) &= \frac{f(a+h)-f(a)}{h}\\ &= \frac{(a+h)^2-3(a+h)+6-(a^2-3a+6)}{h}\\ &= \frac{a^2+2ah+h^2-3a-3h+6-a^2+3a-6}{h}\\ &= \frac{2ah+h^2-3h}{h} = \frac{h(2a-3+h)}{h}\\ &= 2a-3+h\end{aligned}$$

Donc $\lim\limits_{h\to 0}\tau_a(h) = \lim\limits_{h\to 0} 2a-3+h = 2a-3$. Donc la fonction f est dérivable en $a \in \mathbb{R}$ et on a $f'(a) = 2a-3$.

On remarque que si l'on choisit $g(x) = x^2 - 3x + b$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et avec $b \in \mathbb{R}$ alors $g'(a) = 2a-3$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 6.

On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes.

- Soit T l'événement "La carte est un trèfle".
- Soit R l'événement "La carte est un roi".

1. Première étude. Le jeu est complet.
   (a) $P(T)$, $P(R)$, $P(T\cap R)$ et enfin $P(T\cup R)$.
   (b) Les événements T et R sont-ils indépendants ?
   (c) Déterminer $P_T(R)$ et $P_R(T)$.
2. Deuxième étude. Nous avons perdu le roi de Cœur.
   (a) $P(T)$, $P(R)$, $P(T\cap R)$ et enfin $P(T\cup R)$.
   (b) Les événements T et R sont-ils indépendants ?
   (c) Déterminer $P_T(R)$ et $P_R(T)$.

Correction :

1. (a)
   - $P(T) = \dfrac{\text{nb de cas favorables à T}}{\text{nb de cas possibles}} = \dfrac{8}{32} = \dfrac{1}{4}$.
   - $P(R) = \dfrac{4}{32} = \dfrac{1}{8}$.
   - $P(T\cap R) = \dfrac{1}{32}$
   - $P(T\cup R) = P(T) + P(R) - P(T\cap R) = \dfrac{11}{32}$

   (b) On a $P(T)\times P(R) = \dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{8} = \dfrac{1}{32} = P(T\cap R)$. Donc les événements T et R sont indépendants.

   (c) Comme T et R sont indépendants, on a $P_T(R) = P(R) = \dfrac{1}{8}$ et $P_R(T) = P(T) = \dfrac{1}{4}$
2. (a)
   - $P(T) = \dfrac{\text{nb de cas favorables à T}}{\text{nb de cas possibles}} = \dfrac{8}{31}$.
   - $P(R) = \dfrac{3}{31}$.
   - $P(T\cap R) = \dfrac{1}{31}$
   - $P(T\cup R) = P(T) + P(R) - P(T\cap R) = \dfrac{10}{31}$

   (b) On a $P(T)\times P(R) = \dfrac{8}{31}\times\dfrac{3}{31} \neq \dfrac{1}{31} = P(T\cap R)$. Donc les événements T et R sont dépendants.

   (c) On a $P_T(R) = \dfrac{1}{8}$ et $P_R(T) = \dfrac{1}{3}$

Exercice 7. **Tous les résultats demandés dans cet exercice seront arrondis au millième.**

Une entreprise produit des valises de deux types : des valises à deux roues et des valises à quatre roues. Sur chacun des deux modèles, on effectue des tests afin d'évaluer leur solidité.

On dispose des informations suivantes sur le stock de production de cette entreprise :

- le stock contient 30 % de valises à deux roues ;
- 95 % des valises à deux roues réussissent les tests ;
- 63 % des valises sont des valises à quatre roues **et** qui ont réussi les tests.

On choisit au hasard une valise de ce stock. On considère les évènements suivants :

- D : « La valise a deux roues » ;
- R : « La valise réussit les tests ».

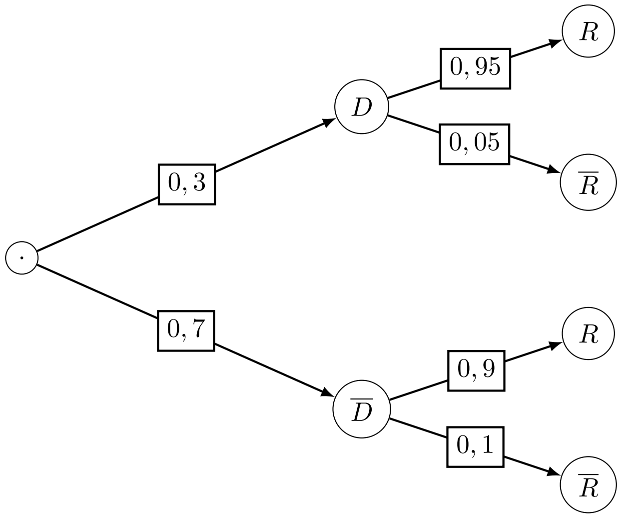
Dans cet exercices les résultats pourront être arrondis à 10^{-3} près.

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous, au fur et à mesure de l'exercice :
2. On choisit une valise à quatre roues, déterminer la probabilité qu'elle réussisse les tests.

3. Démontrer que la probabilité que la valise choisie réussisse les tests est de $0,915$.
4. Sachant que la valise réussit les tests, quelle est la probabilité que ce soit une valise à quatre roues ?
5. Recopier et compléter l'arbre :

Correction :

Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous, au fur et à mesure de l'exercice :



On choisit une valise à quatre roues, déterminer la probabilité qu'elle réussisse les tests.

$$P_{\overline{D}}(R) = \frac{P(R \cap \overline{D})}{P(\overline{D})} = \frac{0,63}{0,7} = 0,9$$

Démontrer que la probabilité que la valise choisie réussisse les tests est de $0,915$.

$$P(R) = P(D \cap R) + P(\overline{D} \cap R = P(D) \times P_D(R) + P(D \cap R) = 0,3 \times 0,95 + 0,63 = 0,915$$

Sachant que la valise réussit les tests, quelle est la probabilité que ce soit une valise à quatre roues ?

$$P_R(\overline{D}) = \frac{P(R \cap \overline{D})}{P(R)} = \frac{0,63}{0,915} = \frac{42}{61} \simeq 0,689$$

$$P_{\overline{R}}(\overline{D}) = \frac{P(\overline{R} \cap \overline{D})}{P(\overline{R})} = \frac{0,7 \times 0,1}{1 - 0,915} = \frac{14}{17} \simeq 0,824$$

Recopier et compléter l'arbre :