DS 2 : Fonctions et dénombrement.

Question de cours : (2 points) Énoncé et démontrer la formule du triangle de Pascal.

Exercice 1. (3 points)

1. On considère une suite (u_n) définie par :
$$\begin{cases} u_0 = -5 \\ u_{n+1} = \frac{3}{5}u_n + 2 \end{cases}$$
On décide d'étudier le comportement de cette suite.
   - **a.** i. Montrer par récurrence :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, -5 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 5$$
   ii. Que peut-on en déduire ?
   - **b.** Dans cette question, on étudie la suite (v_n) par :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = 5 - u_n$$
   i. Interpréter graphiquement les termes de cette suite.
   ii. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{3}{5}$.
   iii. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, v_n en fonction de n. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.
2. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + n - 2$.
On souhaite démontrer que l'expression des termes de la suite (u_n) en fonction de n pour n entier naturel, est donnée par :
$$u_n = \frac{(n-1)(n-4)}{2}$$
Pour cela nous utiliserons deux méthodes. Démontrer cette formule par récurrence.

Exercice 2. (4 points) on considère la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par l'expression :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{x^2+2x+6}{x-1}$$

1. Déterminer le domaine de dérivation de la fonction f et sa fonction dérivée.
2. Dresser le tableau de variation de la fonction f après avoir déterminer ses limites aux bornes de son ensemble de définition.
3. A partir du tableau de variation de f, déterminer le nombre de solution de l'équation $f(x) = 14$. Puis résoudre cette équation.
4. Soit $k \in \mathbb{R}$. Discuter suivant les valeurs de k le nombre de solution de l'équation $f(x) = k$.

Correction :

1. Une fonction rationnelle est dérivable sur son ensemble de définition :
$$f'(x) = \frac{(2x+2)(x-1)-(x^2+2x+6)}{(x-1)^2} = \frac{2x^2-2-x^2-2x-6}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x-8}{(x-1)^2} = \frac{(x-4)(x+2)}{(x-1)^2}$$
2. On a $(x-1)^2 > 0$ sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ donc $f'(x)$ est du signe de $x^2-2x-8 = (x-4)(x+2)$ (signe de a à l'extérieur des racines). Le tableau de variation est donc :

x	$-\infty$		-2		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	10	$\nearrow$	$+\infty$

3. D'après le tableau de variation, l'équation $f(x) = 14$ a deux solutions, une solution sur l'intervalle $]1,4[$ est une solution sur $]4,+\infty[$.
4. On a :

k	$-\infty$		-2		10		$+\infty$
$f(x)=k$		2 *solutions*	1	0 *solution*	1	2 *solutions*	

Exercice 3. (2,5 points) On considère l'ensemble $E = [\![1,8]\!]$. Donner :

a) Le nombre de 3-listes de E.
Le nombre de 3-listes d'un ensemble à 8 éléments est 8^3.

b) Le nombre de 3-listes sans répétition de E
Le nombre de 3-listes sans répétition d'un ensemble à 8 éléments est $8\times 7\times 6$.

c) Le nombre de parties de E à 3 éléments
Le nombres de 3-combinaisons d'un ensemble à 8 éléments est : $\binom{8}{3} = \dfrac{8\times 7\times 6}{3\times 2\times 1} = 56$

d) Le nombre de permutations de E.
Le nombre de permutations d'un ensemble à 8 éléments est 8!.

e) Le nombre de sous-ensembles de E.
Le nombre de sous-ensembles d'un ensemble à 8 éléments est 2^8.

Exercice 4. (4 points) **Grilles de mots croisés.**
Une grille de mots croisés est un tableau rectangulaire à n lignes et p colonnes, constitué de $n\times p$ cases dont certaines sont noircies et d'autres pas.

1. Dans cette question, on s'intéresse aux grilles à 6 lignes et 4 colonnes avec 4 cases noircies.

a. Combien de grilles différentes peut-on former ?

b. Parmi ces grilles, combien d'entre-elles ont :
- exactement deux coins noircis ?
- au moins un coin noirci ?
- exactement une case noircie par colonne ?

2. On s'intéresse maintenant aux grilles à n lignes et p colonnes avec k cases noircies ($k \in [\![1, np]\!]$).

a. Combien de grilles différentes peut-on former ?

b. Parmi ces grilles, combien d'entre-elles ont au plus une case noircie par colonne ?

Correction :

1. a. Ici nous avons $6\times 4 = 24$ cases possibles, et nous souhaitons noircir 4 cases. Ils s'agit donc de déterminer le nombre de 4-combinaisons parmi 24. Soit donc :

$$\binom{24}{4} = \frac{24\times 23\times 22\times 21}{4\times 3\times 2\times 1} = 2\times 23\times 22\times 21$$

b.
- On choisit 2 coins parmi 4, puis 2 cases parmi les 20 cases qui ne sont pas des coins :

$$\binom{4}{2}\times\binom{20}{2} = 6\times 190 = 1140 \quad \text{possibilités}$$

- On cherche ici le contraire, c'est-à-dire aucun coin noirci. Choisir 4 cases parmi les 20 qui ne sont pas des coins :

$$\binom{20}{4}$$

Puis au moins un coin noirci :

$$\binom{24}{4} - \binom{20}{4}$$

- Pour chaque colonne il y a 6 possibilités de choisir la case à noircir soit donc 6^4 possibilités de noircir exactement une case par colonne. On peut le voir aussi comme $Card\mathscr{A}([\![1;4]\!];[\![1;6]\!]) = 6^4$. On peut encore interpréter ce résultat comme le nombre de 4-listes d'un ensemble à 6 éléments (le numéro de chaque ligne)

2. **a.** On doit noircir k cases parmi les np cases possibles. Le nombre de k-combinaisons est alors de :

$$\binom{np}{k}$$

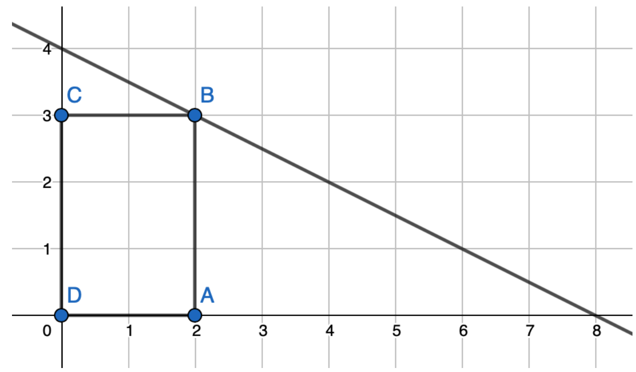
b.
- Il faut déjà que le nombre de colonne soit supérieur au nombre de cases à noircir, c'est-à-dire $p \geq k$.
- Dés lors, il faut choisir les colonnes pour lesquelles l'on noircira une case. Soit donc :

$$\binom{p}{k} \qquad \text{possiblités}$$

- Une fois que l'on a choisi les colonnes qui auront une case noircie, il faut choisir la case à noircir. Soit n possibilités pour chacune des k colonnes choisies. Soit donc : n^k façons de noircir ces k colonnes.
- Au total donc :

$$\binom{p}{k} n^k \qquad \text{possiblités}$$

Exercice 5. (2,5 points)



Sur le graphique ci-dessous, la droite d à pour équation

$$y = 4 - \frac{1}{2}x$$

Les points A, B, C et D forment un rectangle avec :

- Le point A a pour coordonnées $(x, 0)$
- Le point B est sur la droite d
- Le point C est sur l'axe des ordonnées
- Le point D est l'origine

On remarque que la valeur de x varie sur $[0; 8]$ et représente la longueur DA.
On note $S(x)$ la surface du rectangle $ABCD$.

1. Montrer que $S(x) = x\left(4 - \frac{1}{2}x\right)$.
2. Déterminer la forme développée de la fonction S
3. Déterminer le tableau de variation de la fonction S sur l'intervalle $[0, 8]$.
4. En déduire la position du point A (c'est-à-dire la valeur de x) pour que la surface du rectangle $ABCD$ soit maximale puis déterminer cette valeur maximale.

Correction :

1. Montrer que $S(x) = x\left(4 - \frac{1}{2}x\right)$.

   On a $DA = x$ et $AB = y_b - y_A = 4 - \frac{1}{2}x - 0 = 4 - \frac{1}{2}x$. Donc :

$$S(x) = DA \times AB = x\left(4 - \frac{1}{2}x\right)$$

2. Déterminer la forme développée de la fonction S

$$S(x) = x\left(4 - \frac{1}{2}x\right) = 4x - \frac{1}{2}x^2$$

3. Déterminer le tableau de variation de la fonction S.
   On a $\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2 \times \frac{-1}{2}} = 4$ et $f(\beta) = 8$. D'où le tableau :

x	0		4		8
$S(x)$	0	$\nearrow$	8	$\searrow$	0

   On peut aussi $S'(x) = 4 - x$ donc :

x	0		4		8
$S'(x)$		$+$	0	$-$	
$S(x)$	0	$\nearrow$	8	$\searrow$	0

4. En déduire la position du point A (c'est-à-dire la valeur de x) pour que la surface du rectangle $ABCD$ soit maximale.
   D'après le tableau de variation précédent, la surface est maximale pour $x = 4$ et elle vaut alors $\beta = 8$.

Exercice 6. (3 points) Pour cet exercice, vous pouvez conserver les coefficients binomiaux pour exprimer le nombre de solutions demandées. Inutile de les calculer.

1. Combien de façons différentes y a-t-il de mettre 4 lettres dans 3 boîtes à lettres ?
   Solution : 81
2. Il y a 4 bus, 4 conducteurs et 4 contrôleurs. Combien de façons y a-t-il d'attribuer les conducteurs et contrôleurs aux bus de manière à ce que chaque bus ait un conducteur et un contrôleur ?
   Solution : 576
3. Dans une classe de 7 garçons et de 7 filles, combien de possibilités y a-t-il pour composer un comité de classe de 5 élèves, sachant qu'il doit y avoir au moins 2 garçons et 2 filles dans le comité ?
   Solution : 1470
4. Parmi 16 élèves d'une classe, 14 parlent anglais, 13 parlent allemand. Tout élève parle soit anglais soit allemand. Maintenant il faut en choisir deux, dont l'un parle anglais et l'autre parle allemand. Combien de choix possibles y a-t-il ?
   Solution : 116
5. De combien de façons distinctes peut-on diviser une classe de 12 élèves en 3 groupes de 4 élèves chacun ?
   Solution : 5775
6. Soient 12 droites dans le plan, dont 7 horizontales et 5 verticales. Combien de rectangles peut-on former avec ces 12 droites ?
   Solution : 210